



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Informatik

DIFFUSIVE OBERFLÄCHENERZEUGUNG ZUR REALISTISCHEN BESCHNEIUNG VIRTUELLER WELTEN

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades Doktor rerum naturalium

vorgelegt an der

Technischen Universität Dresden

Fakultät Informatik

eingereicht von

Dipl.-Phys. Niels v. Festenberg Packisch

geboren am 23. Oktober 1979 in München

Erster Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Stefan Gumhold, TU Dresden

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Oliver Deussen, Universität Konstanz

Tag der Verteidigung: 28. Oktober 2010

Dresden im November 2010

Kurzzusammenfassung

In dieser Dissertation wird erstmalig ein theoretisches Fundament zur Beschneieung virtueller Szenen entwickelt. Das theoretische Fundament wird als analytisches Modell in Form einer Diffusionsgleichung formuliert. Aus dem analytischen Modell lässt sich eine Gruppe von Algorithmen zur Beschneieung virtueller Szenen ableiten. Eingehende Voruntersuchungen zur allgemeinen Modellierung natürlicher Phänomene in der Computergraphik sowie eine Klassifikation der bestehenden Literatur über mathematische Schneemodellierung bilden den Anfang der Arbeit. Aus der umfassenden Darstellung der Eigenschaften von Schnee, wie er in der Natur vorkommt, ergeben sich die Grundlagen für die Modellbildung. Die Modellbildung fußt auf den grundlegenden Ansätzen der klassischen Mechanik und der statistischen Physik. Für die Beschneieung auf visueller Skala erweist sich der Diffusionsprozess als geeignete Beschreibung. Mit der Beschreibung lassen sich diffusiv Schneeoberflächen erzeugen. Der konkrete computergraphische Wert des theoretischen Fundaments wird anhand zweier Implementierungen exemplarisch dargestellt, und zwar in der Distanzfeldmethode und der Diffusionskernmethode. Die Ergebnisse werden mithilfe dreidimensionaler Rauschtexturen und Alpha-Masken an den Rändern fotorealistisch visualisiert.

Abstract

In this dissertation for the first time a theoretical foundation is developed for snow accumulation in virtual scenes. The theoretical foundation is formulated in an analytical model as diffusion equation. The analytical model leads to a group of algorithms for virtual snow accumulation. Comprehensive investigations for the modelling of natural phenomena in computer graphics in general are used to develop a method classification scheme. Another classification is given for an overview over the aspects of snow in the real world. This allows an efficient presentation of related literature on snow modelling. A new approach of snow modelling is then drawn from first principles of classical mechanics and statistical physics. Diffusion processes provide an efficient theoretical framework for snow accumulation. The mathematical structure of diffusion equations is discussed and demonstrated to be adequate to snow modelling in visual scales. The value of the theoretical foundation for computer graphics is demonstrated with two exemplary implementations, a distance field method and the diffusion kernel method. Results are visualized with 3D noise textures and alpha masks near borders delivering photorealistic snow pictures.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
2. Zentrale Beiträge dieser Arbeit	11
3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik	13
3.1. Die Rolle der computergraphisch modellierten Naturphänomene in der Informatik	14
3.2. Repräsentationsformen natürlicher Phänomene in der Computergraphik .	16
3.3. Modellierungsmethoden im Überblick	20
3.3.1. Bildbasierte Methoden	21
3.3.2. Diskretisierungsbasierte Methoden	21
3.3.3. Kontinuumsbasierte Methoden	22
3.3.4. Modellreduktionsmethoden	23
3.3.5. Interaktionsmethoden	24
3.4. Klassifikation der natürlichen Phänomene in der Computergraphik	25
3.4.1. Statische Phänomene	26
3.4.2. Dynamische Phänomene	28
3.4.3. Zusammengesetzte Phänomene	30
3.4.4. Sonstige natürliche Phänomene	32
3.5. Schlussfolgerung	34
4. Schnee in der Natur	35
4.1. Entstehung	36
4.2. Niederschlag	36
4.3. Akkumulation	38
4.4. Metamorphose	39
4.5. Computergraphisch modellierbare Aspekte	40
5. Vorarbeiten zur computergraphischen Schneemodellierung	45
5.1. Modellierung statischer Aspekte	45
5.1.1. Optische Schneeeigenschaften	45
5.1.2. Geometrische Form der Schneeoberflächen	46
5.1.3. Schnee als makroskopische Landschaftstextur	48
5.2. Modellierung dynamischer Aspekte	48
5.2.1. Schneefall	48
5.2.2. Schneeschmelze	50
5.2.3. Lokale Schneeuumlagerung und Kompaktifizierung	50

5.2.4. Bisher nicht modellierte Aspekte	51
5.3. Zusammenfassung	52
6. Physikalische Methoden zur Darstellung von Materialflüssen und Phasengrenzen	55
6.1. Mikroskopische Modelle	56
6.1.1. Formale Schneecharakterisierung mit einer Vielteilchen-Hamilton-Funktion	56
6.1.2. Statistische Formulierung der Vielteilchenbeschreibung	57
6.2. Makroskopische Modelle	59
6.2.1. Schneeverteilung als globales Strahlungsgleichgewicht	59
6.2.2. Lokale stochastische Darstellung als getriebene Oberfläche	61
6.2.3. Oberflächenentwicklung als Reaktionsdiffusion	63
6.3. Zusammenfassung und Schlussfolgerung	65
7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen	67
7.1. Das physikalische Prinzip der Diffusion	67
7.1.1. Grundlagen	67
7.1.2. Diffusion auf Höhenfeldern	68
7.2. Mathematische Behandlung linearer Diffusionsgleichungen	70
7.2.1. Konstruktion von allgemeinen Lösungen mittels Fundamentallösung	70
7.3. Analytische Lösungsbeispiele	72
8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien	75
8.1. Faltung als Grundprinzip der diffusiven Schneedeckenerzeugung	76
8.2. Datenstrukturen zur Darstellung von Schneedecken	79
8.3. Darstellung mittels Distanzfeld	81
8.3.1. Details der Distanzfeldmethode	81
8.3.2. Diskussion	85
8.4. Darstellung als Diffusionsprozess	86
8.4.1. Modelldetails	86
8.4.2. Diskussion	94
8.5. Erweiterung für Überhänge und Schneebrücken	96
8.5.1. Brückenerzeugung	97
8.5.2. Überhangsberechnung	98
8.5.3. Ergebnisse	99
8.5.4. Diskussion	100
8.6. Vergleich und Verallgemeinerbarkeit der Schneemodellierungsansätze . . .	101
9. Visualisierung virtueller Schneeoberflächen	103
9.1. Schneeoberfläche	103
9.2. Schneeränder	104
9.3. Diskussion	106

10. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	107
10.1. Zusammenfassung	107
10.2. Schlussfolgerungen	108
A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen	109
A.1. Randprofile und Stützflächenabhängigkeit	109
A.2. Verdeckung	111
A.3. Glättung	113
A.4. Innenränder	116
A.5. Brücken und Überhänge	118
A.6. Nicht modellierte Aspekte	122
B. Sammlung virtuell beschneiter Szenen	125
B.1. Distanzfeldmethode	125
B.2. Diffusionskernmethode	127
B.3. Brückenbildung und Überhänge	130
Literaturverzeichnis	131
Abbildungsverzeichnis	143
Veröffentlichungen	151

1. Einleitung

Die Computergraphik ist eine junge Disziplin. Trotzdem gibt es heute keine Öffentlichkeit mehr ohne Computerbilder. Der graphische Computer hat sich zu einem umfassenden Mittel des gesellschaftlichen Austauschs entwickelt. Im Computer verschmelzen die unterschiedlichsten menschlichen Tätigkeiten zu einer neuen Einheit.

Die vorliegende Dissertation ist ein Teil dieser Vereinheitlichung, indem sie eine Verknüpfung zwischen der Physik und der Computergraphik herstellt. Das Ziel der Verknüpfung ist die Entwicklung eines Algorithmus zur automatischen Beschneidung virtueller Szenen. Das spezifische Problem der automatischen Schneedeckenerzeugung ist beispielhaft für das konstruktive Zusammenwirken von Computergraphik und Physik. Für die Simulation von Schnee auf visueller Skala gibt es in der Physik bisher keine theoretischen Modelle. Auf der anderen Seite stellt Schnee ein starkes gestalterisches Mittel für computergraphischen Szenen dar. So wird in dieser Arbeit der Weg von der physikalischen Modellbildung bis zur Visualisierung virtuellen Schnees beschritten. Am Ende des Weges steht sowohl ein physikalisches Modell zur Charakterisierung von natürlichem Schnee auf visueller Skala, als auch mehrere computergraphische Schneeverteilungsalgorithmen. Die Algorithmen zeigen sich bisherigen Ansätzen überlegen, und zwar sowohl in der Recheneffizienz als auch in der visuellen Plausibilität.

Der Ansatz dieser Dissertation folgt der allgemeinen Entwicklungsrichtung der Computergraphik hin zu immer stärkerer Formalisierung. Zum Verständnis dieser Orientierung lohnt es, sich die Anfänge der Computergraphik zu vergegenwärtigen.

Die ersten programmierbaren Computer wurden in den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt, vor allem in Deutschland und den USA. Nach dem Ende des zweiten Weltkrieges erfolgten grundlegende Neuerungen vornehmlich in den USA. Durch die enge Bindung der Computerentwicklung an die Rüstungsforschung war die Transparenz des technischen Fortschritts in diesem Bereich zunächst gering. Die Schnittstelle zwischen Mensch und Maschine blieb auf unhandliche Lochkarten beschränkt. Außerhalb des Militärs kamen Computer nur vereinzelt zur Anwendung.

Mit der Heraufkunft der ersten bildgebenden Computer änderte sich das schlagartig. Die erste öffentlich dokumentierte computergraphische Anwendung wurde 1963 am MIT vorgestellt [Sut63]. Mit dem sogenannten Sketchpad konnten über einen Lichtgriffel elektronisch speicherbare Zeichnungen angefertigt werden. Die Zeichnungen wurden an einem Röhrenbildschirm angezeigt.

Der Durchbruch der Computergraphik ging und geht bis heute von den Computerspielen aus. Die ersten Spiele dieser Art kamen in den 70er Jahren in Umlauf [Her97]. Sie hießen noch Videospiele und waren an herkömmliche Fernsehapparate gebunden. Die Aussicht auf massenweise Computerverbreitung rief schließlich auch deren breit angelegte industrielle Entwicklung auf den Plan. So gelangte der Computer als eigenständiges

1. Einleitung

Gerät auch in die privaten Haushalte. Die Rechenleistung und die Programmierspielräume verbesserten sich in allen Bereichen rapide und kontinuierlich. Die Verbesserung verlief so rasant, dass neben der klassischen Aufteilung von Forschung und Entwicklung in Theorie und Experiment, d. h. Entwurf und technische Umsetzung eine dritte Entwicklungsrichtung entstand: Die Lehre der Programmiertechnik oder anders gesprochen, die Lehre zur hierarchischen Formalisierung von Rechenbefehlskaskaden. Dabei wurden nach und nach militärische Organisationsformen in Programmquelltexte abgebildet, wie zum Beispiel der Grundsatz „divide et impera“. Dies führte zu einem großen Entwicklungseffizienzgewinn, allerdings auf Kosten der Transparenz über Einzelprojekte hinaus. Die hierarchische Kapselung der neueren Programmierungsumgebungen erlaubte in den Programm- und Anwendungsentwicklungen außerdem die Auftrennung in High- und Low-Level-Bemühungen. Diese Spanne besteht bis heute.

Der Großteil der heutigen Computergraphikforschung spielt sich im High-Level Bereich ab, d. h. in der Entwicklung mathematisch-logischer Strukturen für eine bestimmte Hardware. Grundsätzliche Neuerungen ergeben sich hier folglich fast immer aus Hardwareinnovationen [ESK96]. Die neue Hardware gehört dabei entweder zur darstellenden Einheit, d. h. zur Graphikkarte, zum Bildschirm oder zu Mensch-Maschine-Interaktionswerkzeugen, wie z. B. Spacemäusen oder Tracking-Systemen. Rein algorithmischer Fortschritt ist seltener. Der Stand der Forschung liegt hier bereits häufig nahe an den theoretischen Optimierungsgrenzen (wie z. B. in der Netzkompensation [Gum96]). Durch die stetig anwachsende Programmierbarkeit und Rechenleistung werden jedoch immer weitere und komplexere Klassen wissenschaftlicher Erkenntnisse auf den Computer abbildbar. Das hat weitreichende Konsequenzen: Einerseits verschwimmen die Grenzen zwischen den Disziplinen, und andererseits lassen sich Ideen immer einfacher von einem Fachbereich in den anderen übertragen.

Konkret bedeutet dieser Trend für die Computergraphik, dass sie ihren Fortschritt zunehmend aus angrenzenden Disziplinen schöpfen kann. Zu den Nachbardisziplinen gehören vor allem die Mathematik und die Physik, aber auch Psycho- und Physiologie der menschlichen Wahrnehmung. Offensichtlich gibt es hier erhebliche Entwicklungspotentiale. Zur Physik besteht eine besonders enge Verbindung, da die Physik bereits stark formalisiert und vereinheitlicht ist. Physikalisch-mathematische Formulierungen lassen sich in programmierbare Algorithmen übertragen, und die Algorithmen können graphisch dargestellt werden. Die vorliegende Arbeit zur computergraphischen Schneemodellierung ist ein Beispiel für diese Vorgehensweise.

Die Gliederung der Dissertation ergibt sich aus taxonomischen Anfangsbetrachtungen, die dann analytisch abstrahiert werden und schließlich zum fertigen Schneeverteilungsmodell synthetisiert werden. In Kapitel 3 wird ein Überblick über die prinzipiellen Möglichkeiten der Modellierung natürlicher Phänomene in der Computergraphik entwickelt. Dabei wird auch die Rolle dieses Spezialgebietes innerhalb der Informatik diskutiert. Ein Methodenkatalog für die computergraphische Naturphänomenmodellierung wird vorgeschlagen und für eine Klassifikation des aktuellen Forschungsstandes ausgenutzt. Kapitel 4 katalogisiert die physikalischen Eigenschaften des Schnees in der Natur. Der Schwerpunkt liegt auf der Extraktion computergraphisch modellierbarer Aspekte. In Kapitel 5 wird ausgehend von den Vorüberlegungen der bisherige Forschungsstand der

computergraphischen Schneemodellierung beleuchtet. Grundlegende physikalische Methoden zur Beschreibung von Materialien des Komplexitätsgrades von Schnee werden in Kapitel 6 vorgestellt. Dabei erweist sich die Beschreibung der Schneeverteilung als Diffusionsprozess als besonders geeignet. In Kapitel 7 wird daher die Lösung und Anwendung von Diffusionsgleichungen beschrieben und diskutiert. Den Kern der Arbeit bildet Kapitel 8. Dort werden alle Vorbetrachtungen und Analysen zu einem computergraphischen Algorithmus zur Schneeverteilung zusammengefasst. In Kapitel 9 werden Methoden zur Visualisierung der erzeugten Schneegeometrie vorgestellt. Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 10. Nach einer Gesamtzusammenfassung werden hier werden mögliche zukünftige Forschungsperspektiven skizziert. In Anhang A ist eine Sammlung über Beobachtungen an natürlichem Schnee zu finden, Anhang B zeigt eine Auswahl computergraphisch generierter Schneeszenen.

2. Zentrale Beiträge dieser Arbeit

Der zentrale Beitrag dieser Dissertation ist die Entwicklung eines allgemeinen theoretischen Fundamentes zur automatischen Beschneidung virtueller Szenen. Ein solches Fundament stellt eine grundlegende Neuheit in der Forschung dar. Bisherige Arbeiten zur virtuellen Beschneidung mussten ohne konsistente physikalische Theorie auskommen. Die Theorie ist ein analytisches Modell, dass aus einer statistischen Untersuchung der einzelnen Schneepartikel gewonnen wird. Sie beruht auf dem Prinzip der Diffusion und der Beschreibung der Schneeoberfläche als Höhenfeld.

Mit der analytischen Schneebeschreibung lässt sich eine Vielzahl neuer Beschneidungsalgorithmen entwickeln. Dies wird exemplarisch an zwei konkreten Implementierungen demonstriert. Die erste Implementierung, Distanzfeldmethode genannt, beruht auf der segmentweisen Berechnung von Distanztransformationen in einer Szene. Die zweite, Diffusionskernmethode genannt, ist eine Übertragung einer analytischen Lösungsmethode für Diffusionsgleichungen mittels Gaußkern-Faltung.

Beide Methoden gestatten die vollautomatische virtuelle Beschneidung in bislang unerreichter Qualität.

Neben dem konkreten Beitrag zur virtuellen Beschneidung bietet die Arbeit einen Überblick über die prinzipiellen Möglichkeiten der computergraphischen Naturphänomenmodellierung entwickelt. Auch hierfür wird ein formaler Rahmen vorgeschlagen. Die Modellierung von Schnee erscheint dabei als beispielhaft für die Modellierung komplexer Phänomene: die Gesamtkomplexität wird zunächst auf ein deterministisches Grundgerüst reduziert. Ausgehend vom Grundgerüst lassen sich komplexere und möglicherweise stochastische Details hinzufügen.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

Die Möglichkeiten zur Modellierung natürlicher Phänomene in der Computergraphik sind fast so vielfältig wie die natürlichen Phänomene selbst. In diesem Kapitel wird daher zur besseren Übersicht eine Klassifikation der Modellierungsansätze entwickelt. Ausgehend von der Rolle der Computergraphik in der Informatik wird eine katalogartige Zusammenschau der verschiedenen Methoden zur Modellierung natürlicher Phänomene in virtuellen Welten dargestellt. Die Zusammenschau wird dann ausgenutzt, um den aktuellen Stand der Forschung zu skizzieren.

Sowohl die Zusammenschau der Methoden als auch die Rolle der Computergraphik innerhalb der Informatik ist nicht ohne Weiteres abgrenzbar, da heute kaum eine Computeranwendung ohne graphische Benutzerschnittstellen auskommt. Neben die graphische Benutzerschnittstelle ist außerdem die Allgegenwart virtueller Welten getreten. Häufig sind es nicht abstrahierte Verwaltungsoberflächen, sondern Abbilder der wirklichen Welt, über die der Benutzer mit dem Computer in Austausch tritt. Dazu gehört zuerst die Anwendungsgruppe, die weltweit erhebliche Umsätze in der Programmierungsindustrie generiert: die Computerspiele. Fast immer bewegt sich dabei ein sogenannter Avatar¹ durch eine virtuelle Welt, deren Reiz und Überzeugungskraft aus ihrer Verwandtschaft zur wirklichen Welt rühren. Diese Verwandtschaft lässt sich unter anderem dadurch hervorrufen, dass natürliche Phänomene digital reproduziert werden. Interessanterweise ist die virtuelle d. h. wörtlich geistige Beschreibung der Welt schon immer das Rückgrat aller wissenschaftlichen Bemühungen gewesen. Neu ist die Möglichkeit der Abbildung gedachter Theorien in konkrete maschinelle Entsprechungen in Form von Simulationen. Die Methode der Computersimulation hat sich inzwischen zur Standardvorgehensweise sehr verschiedener Forschungszweige entwickelt. Kaum ein technisch-naturwissenschaftliches Fach kommt heute ohne Computermodell aus. Dieser Trend reicht von der Teilchen- über die Klima- bis zur Astrophysik, von der Prozessorentwicklung bis zum Flugzeugbau. Sogar Biologie, Soziologie und Ökonomie stützen sich zunehmend auf maschinelle Anschauungen. Fast entsteht der Eindruck, es gäbe überhaupt keine andere sinnvolle Forschungsmethode mehr [Fla99].

Die folgende Einordnung der Computergraphik in die Informatik und die Rolle der Modellierung natürlicher Phänomene für bilderzeugende Computerwelten wird zeigen, dass bei dieser Thematik trotz der hohen Spezialisierung vielfältige Bezüge zu benachbarten

¹Vom Sanskrit-Wort *avatara* für das Hinabsteigen eines Gottes in irdischer Gestalt abgeleitet (nach dem Wörterbuch Sanskrit-Deutsch, Klaus Mylius (Hg.), Langenscheidt Verlag Enzyklopädie, 4. Auflage, 2000) und seit Neal Stephenson's Roman „Snow Crash“ von 1992 zunehmend in Gebrauch für alle Art virtueller Spielfigur.

Fächern bestehen.

3.1. Die Rolle der computergraphisch modellierten Naturphänomene in der Informatik

Welche Rolle spielt die Modellierung natürlicher Phänomene im Kontext der Computergraphik? Zur Verdeutlichung ist dazu zunächst der Unterschied zwischen der Informatik und der Computergraphik darzulegen. Bei Fachbereichen mit einer so hohen Dynamik wie der Informatik und der Computergraphik bleiben solche Skizzen notwendig streitbar. Ein prinzipieller Überblick aber ist möglich. Im Folgenden sind drei wesentliche Kennzeichen beschrieben. Aus ihnen ergibt sich schließlich der Bezug zur computergraphischen Naturmodellierung.

Das offensichtlichste Kennzeichen der Computergraphik ist die Orientierung auf visuelle Ausgaben hin. Die Informatik an sich bedarf dieser Einschränkung nicht. Die Daten, die sie verwaltet, verarbeitet und ausgibt können in beliebiger Gestalt erscheinen. Wenn es sich beispielsweise um ein Programm zur Berechnung des nationalen Steueraufkommens handelt, dann sind die Ausgabedaten als reine Zahlenwerte wirksam und brauchbar, ohne visuelle Darstellung. Streng genommen ist auch das Anzeigen eines Texts eine visuelle Ausgabe, aber in der computergraphischen Grundlagenliteratur besteht Konsens darüber, dass die Computergraphik sich nur auf *Bilder* als Ausgabeformat bezieht (z.B. [ESK96, Shi05, FDFH99]). Über den erkenntnistheoretischen Unterschied zwischen textuellem und visuellem Verständnis gibt es umfangreiche geistes- und humanwissenschaftliche Untersuchungen (z. B. [Flu07] oder [Pos86]). Wesentlich für die Betrachtungen hier ist, dass der Disziplin der wissenschaftlichen Visualisierung inzwischen ein beträchtlicher Wert in der Forschung und der Wissenschaftskommunikation beigemessen wird (siehe z.B. das *Zoomable Cell Project* [GS08]).

Aus der Spezialisierung der Computergraphik auf die elektronische Bilderzeugung folgt die Eigenständigkeit dieses Faches. Es ist ein kleiner Unterschied, ob es sich um die Veranschaulichung wissenschaftlicher Inhalte oder um beliebige Darstellungen handelt. Die Computergraphik kann sich ihre Forschungsinhalte frei wählen zwischen Unterhaltungsindustrie, konkreter Darstellungsoptimierung und der darstellenden Unterstützung anderer Wissenschaftszweige. Das Maß des Erfolges und der Folge ist immer die spontane oder intuitive Überzeugungskraft der erzeugten Bilder, immer in Relation zum bisher Erreichten und immer in der Pflicht zur unmittelbaren Wirksamkeit.

Das zweite Kennzeichen der Computergraphik gegenüber der Informatik ist hardwaretechnischer Natur. Schon sehr früh etablierte sich in den Architekturen der Heimcomputer eine mehr oder weniger unabhängige Einheit zur Berechnung der Bildausgabe. Den Bereich der Graphikprozessoren in der Hardware-Entwicklung kennzeichnet bis heute erhebliche Innovationskraft. Der zentrale Berechnungsengpass besteht in der Bandbreite des Frame-Puffer-Speichers [FDFH99], d. h. der begrenzten Geschwindigkeit von Schreib- und Leseoperationen für den Speicher aus dem der Bildschirm seinen Inhalt bezieht. Seit Einführung der Rastergraphik liegt die Besonderheit der Graphikberechnungen aber in

3.1. Die Rolle der computergraphisch modellierten Naturphänomene in der Informatik

der massiven Parallelisierbarkeit: Bei geeignetem Befehlspipelining² sind die Farbberechnungen der einzelnen Pixel unabhängig voneinander. Die Architekturen heutiger GPUs³ sind daher die Einheiten in Heimcomputern, die den höchsten Grad an Parallelität und oft auch die größten Rechenkapazitäten aufweisen. Inzwischen sind auch weite Teile der Graphik-Pipeline nicht mehr fest verdrahtet, sondern programmierbar. Die Programmierung paralleler Architekturen bietet allerdings einige theoretische Feinheiten [Ung97]. Daher widmet sich ein nicht unbeträchtlicher Teil der computergraphischen Publikationen der GPU-Programmierung.

Das dritte Kennzeichen der Computergraphik betrifft ihre Bedeutung bei der Kommunikation zwischen Mensch und Maschine. Heutzutage lässt sich praktisch kein Computer mehr finden, der nicht über eine graphische Schnittstelle verfügt. Der Grund dafür liegt vermutlich darin, dass der Sehsinn den schnellsten und differenziertesten Wahrnehmungskanal des Menschen darstellt (siehe auch die Beschreibung zu Abb. 3.1). Je größer die Bandbreite der visuellen Ausgabe des Computers, desto effizienter die Übermittlung elektronischer Daten an den Menschen. Die Computergraphik spielt daher eine herausragende Rolle beim Fortschritt der Interaktion zwischen Mensch und Maschine. Diese Rolle hat wohl auch die rasante industrielle Entwicklung der Graphik-Hardware begünstigt. Der Kreis der möglichen Anwender wächst, je einfacher die Bedienung der Computer wird. Denn graphisch ausgefeilte Computerprogramme erwecken den Eindruck leichter Bedienbarkeit.

Dies gilt vor allem für den industriellen Bereich. Gute Graphik ist ein entscheidendes Qualitätsmerkmal für Computerspiele und Simulationsanwendungen. Gute Graphik heißt in Computerspielen täuschende Nachahmung der Wirklichkeit und für Simulationen hohe Wirksamkeit und Überzeugungskraft und damit mutmaßlich hoher Realitätsgehalt. Je genauer die visuelle Entsprechung zwischen Computergraphik und Realität, desto erstrebenswerter. Zwar liegt der besondere Reiz oft in den nicht-realen Zusätzen in den Spielen, aber nur solange, wie die virtuelle Welt erkennbar verwandt bleibt mit der eigentlichen Realitätswahrnehmung der Spieler. Daher ist es für die Computerspieleindustrie von großem Interesse, die natürlichen, physikalischen Phänomene der Realität in den Spielen möglichst genau abzubilden und eventuell zu steigern. Bei Spielen mit besonders großer Nutzergemeinde wie z. B. *World of Warcraft*⁴ fällt auf, dass die Spielwelten mit viel Sorgfalt als menschenunberührt und naturbelassen konzipiert sind. Offenbar entspricht den industriellen Bemühungen um bessere Graphik ein menschliches Bedürfnis nach natürlich-vorkulturellen Umgebungen, allerdings im kontrollierten Rahmen des Computers. Die Nutzer können schließlich bei der Computerbedienung stärker auf natürliche Erfahrungen zurückgreifen, wenn die virtuellen Welten der Natur und der Realität ähnlicher werden.

Aus diesen Betrachtungen lässt sich folgern, dass die Modellierung natürlicher Phä-

²D. h. Parallelisierung eines Befehls durch dessen Zerlegung in Teilschritte. Wenn der Befehl wiederholt ausgeführt wird, kann dann der erste Teilschritt des nächsten Aufrufs parallel zum zweiten Teilschritt des vorhergehenden Aufrufs verarbeitet werden.

³Graphical Processing Unit

⁴Laut Pressemitteilung der Blizzard Entertainment Incorporation vom 23. Dezember 2008 über 11,5 Millionen Nutzer weltweit, Tendenz steigend.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

nomene als ökonomischer Faktor von Belang ist für die Computergraphik, und zwar im Rahmen einer ihrer wesentlichen Funktionen für die Informatik: zur Verbesserung der Kommunikation zwischen Mensch und Computer durch visuell intuitivere Benutzerschnittstellen. Für die Forschung eröffnet sich ein reichhaltiges Betätigungsfeld.

3.2. Repräsentationsformen natürlicher Phänomene in der Computergraphik

Die Beschreibung der Natur mithilfe der Mathematik war immer schon Gegenstand der Naturwissenschaften. Die Sprache Mathematik eignet sich außerdem zur theoretischen Charakterisierung bzw. Programmierung von Maschinen. Für die Repräsentation natürlicher Phänomene in der Computergraphik steht folglich ein sehr großes Repertoire an Vorarbeiten zur Verfügung.

Die Qualität einer mathematischen Beschreibung hängt in jeder Wissenschaft von ihrer experimentellen Überprüfbarkeit ab. Im Idealfall lässt sich aus dem Experiment praktischer Nutzen ziehen. Das heißt auch, dass eine wirksame mathematische Beschreibung auf die experimentellen und praktischen Randbedingungen abgestimmt sein muss. Für die Computergraphik macht sich diese Forderung auf zwei Arten bemerkbar: Erstens muss die Beschreibung sich überhaupt auf das verwendete Computersystem abbilden lassen, d. h. kompatibel zur verwendeten Hardware sein, und zweitens muss die mathematische Beschreibung implementierbar sein, d. h. übersetzbar in Quelltext. Im Folgenden geht es zunächst um die erste Frage: Wie sehen bei gegebener Hardware sinnvolle Repräsentationsformen für natürliche Phänomene in der Computergraphik aus? Die prinzipiellen Methoden zur Implementierung werden im Anschluss in Abschnitt 3.3 behandelt.

Was genau bedeutet es, ein natürliches Phänomen *realistisch* zu modellieren? Diese Frage bietet vielseitige Diskussionsmöglichkeiten und weitläufige Literatur; den Rahmen dieser Arbeit sprengt sie allerdings. Hier beschränkt sich die Betrachtung auf einen Aufbau, den Dix et al. [DFA04] *desktop virtual reality* nennen, auf eine virtuelle Schreibtischrealität. Als Realität wird darin bezeichnet, was dem Benutzer auf dem Bildschirm und den Lautsprechern angezeigt oder vorgespielt wird. Eingreifen kann der Benutzer nur über die Tastatur und die Maus. Offensichtlich handelt es sich dabei um eine stark eingeschränkte Art der Realität. Allerdings erlaubt das menschliche Abstraktionsvermögen sogar hier die Vorstellung einer konkreten Wirklichkeit. Die Übertragung der Mausbewegung auf dem Schreibtisch in die Bewegung des Mauszeigers in der Ebene des Bildschirms bereitet kaum einem Benutzer Schwierigkeiten; es wird sogar den wenigsten überhaupt bewusst sein, dass es sich um eine abstrahierte Benutzerschnittstelle handelt. Zur Zeit der Erfindung der Maus [EE68] war das mit Sicherheit noch anders. Für die Bewegung in sogenannten Ego-Shootern ist diese Abstraktion noch gesteigert, indem menschliche Fortbewegung zu Fuß mit einer Zieleinrichtung auf die Maus und eine kleine Anzahl von Tasten übertragen ist. Auch hier stört der hohe Grad an Realitätsferne nicht. Dass man dennoch selbstverständlich von natürlichen Phänomenen in der Computergraphik sprechen kann, ist bei genauerer Betrachtung verwunderlich, da

3.2. Repräsentationsformen natürlicher Phänomene in der Computergraphik

es implizit erhebliches Abstraktionsvermögen erfordert. Es gibt daneben auch Bemühungen, die erforderliche interaktive Abstraktion der Benutzer zu vermindern, z.B. durch Datenhandschuhe, Augentracking oder experimentellere Ansätze wie in [FBG09]. Bevor in den folgenden Abschnitten solche Selbstverständlichkeit vorausgesetzt wird, befördert ein Blick auf die Entwicklung zur jetzigen Lage das Verständnis.

Die ersten graphischen Anzeigergeräte beruhten auf Kathodenstrahlröhren. Elektronen wurden darin wie beim Oszillographen auf einen phosphoreszierenden Schirm geschossen und riefen dort visuell wahrnehmbares Leuchten hervor. Eine Reihe von Kondensatoren lenkte den Strahl auf stückweise linearen Pfaden über den Schirm. Solche Vektorgraphiksysteme waren in den 1970er Jahren der dominierende Gerätetyp [ESK96]. Die Programmierung der Strahlpfade erfolgte sehr nah an den gerätespezifischen Gegebenheiten und der Programmierer gab direkt die Pfadabschnitte an. Die Vorgehensweise ähnelte eher dem Malen mit einem Pinsel als der Gestaltung elektronisch-virtueller Realitäten.

Heute ist die Vektorgraphik praktisch bedeutungslos. Stattdessen basieren die Bildschirme auf der sogenannten Rastergraphik. Anfangs wurde Rastergraphik auch noch mit Kathodenstrahlröhren realisiert. Dabei wird der Bildschirm in Punkte bzw. Pixel aufgeteilt, die entweder leuchten können oder nicht. Mit der technischen Aufteilung eines Bildes in einzelne Pixel erschien erstmals die Notwendigkeit, Bilder vor der Anzeige umzurechnen. Die Programmierer arbeiteten logisch weiter mit Linien oder Flächen, vor der Anzeige mussten diese Objekte aber in Pixel übersetzt bzw. gerastert⁵ werden. In der Folge hat sich dieses Prinzip erheblich weiterentwickelt. Aus der Rasterisierung ist eine vielschichtige Graphikpipeline zur technischen Umsetzung dreidimensionaler Computergraphik geworden.

Am Anfang der heute gebräuchlichen Graphikpipeline stehen dreidimensionale Repräsentationen der virtuellen Welt und am Ende die visuelle Ausgabe auf Rasterbildschirmen. Der Programmierer übergibt der Graphikkarte nur noch dreidimensionale Punktkoordinaten und die Beziehungen der Punkte zueinander. Die Graphikkarte transformiert die 3D-Punkte oder Vertizen in Bildschirmkoordinaten und berechnet über einige Zwischenschritte die auszugebenden Pixelfarben. Die Anfangseingabe der Punktkoordinaten besteht aus Abbildern der wirklichen Welt, daher nennt man die Koordinaten Weltkoordinaten.

Das Weltkoordinatensystem ist der wirklichen Welt nachempfunden: Die mathematische Struktur aus dreidimensionalen Vektoren entspricht der Formalisierung der klassischen Mechanik durch Massenpunkte. So ergibt sich die Möglichkeit, virtuelle Welten in der klassischen Sprache der Physik zu beschreiben und sich von der strikten Gerätebindung der Anfangszeit zu emanzipieren. Zu Zeiten fest verdrahteter 3D-Graphikkarten war dies die übliche Methode zur computergraphischen Modellierung natürlicher Phänomene.

Inzwischen sind die Graphikkarten jedoch an mindestens drei Stellen programmierbar: bei der Transformation einzelner Punkte im Vertexshader, bei der Erzeugung und Zusammenführung von Punkten im Geometrieshader und bei der Pixelfarbberechnung im Fragmentshader. Dies hat dazu geführt, dass die programmiertechnischen Beschrei-

⁵Zum Beispiel mit dem sogenannten Bresenham-Algorithmus.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

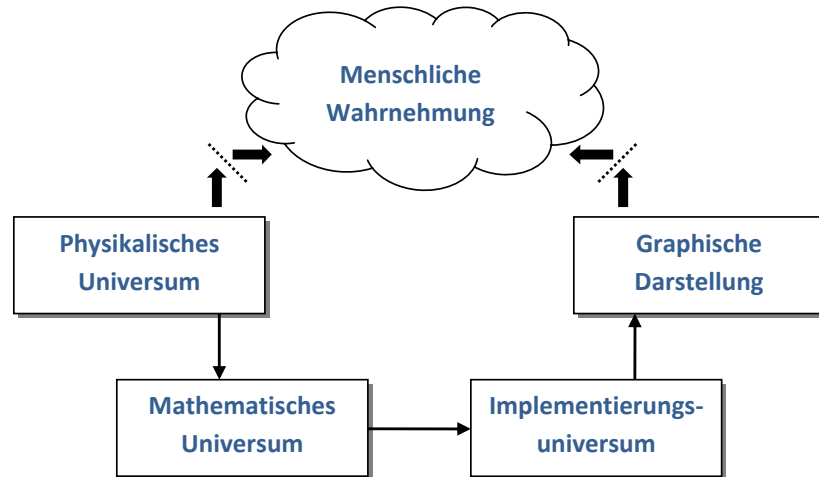


Abbildung 3.1.: Abgewandelt nach [VCC03]: Der Realitätsgrad einer computergraphischen Modellierung lässt sich als Ähnlichkeit zwischen der direkter oder messtechnisch vermittelter Wahrnehmung und der Wahrnehmung der Computerausgabe definieren.

bungen der virtuellen Welten wieder stärker von der verwendeten Hardware abhängen.

Nichtsdestotrotz ist es hilfreich, die Verwendung physikalischer Methoden in der Computergraphik in einen Definitionsrahmen zu stellen. Gomes, Velho und andere schlugen ein *four universes paradigm* vor [GV95, VCC03], um die Beziehung zwischen der Physik und der Computergraphik zu formalisieren. Das Paradigma beruht auf der Aufteilung der computergraphischen Modellierung in vier Universen, die jeweils abstrakt als Mengen aufgefasst werden. Am Anfang steht das physikalische Universum, das über eine Relation mit dem mathematischen Universum verbunden ist. Das mathematische Universum wiederum enthält den Rahmen für das Repräsentationsuniversum. Repräsentationen sind dabei diskretisierte Formulierungen mathematischer Konstrukte. Am Ende werden die Repräsentationen in das Implementierungsuniversum abgebildet, d.h. in Datenstrukturen in konkretem Quelltext.

Der Nutzen dieser abstrakten Definitionen zeigt sich weniger in der Programmierpraxis, als in der Kommunizierbarkeit computergraphischer Modellierungsansätze. Die Kommunizierbarkeit schließlich ermöglicht effizientere Weiterentwicklung. Mithilfe einiger kleiner Veränderungen zu [VCC03] lässt sich ein nützlicher Bezugsrahmen gewinnen. Abbildung 3.1 zeigt die Abwandlung des Vier-Universen-Paradigmas. Diskretisierung und Implementierung sind in ein Universum zusammenfasst, stattdessen ist die graphische Ausgabe ein eigenes Abstraktionsniveau. Neu ist außerdem die explizite Angabe der menschlichen Wahrnehmung als letzte Bewertungsinstanz. Die gestrichelten Linien bedeuten Vermittlungen zwischen dem physikalischen Universum und der Computerausgabe auf dem Weg zur menschlichen Wahrnehmung hin: einerseits vermittelt ein Messgerät, z.B. eine Kamera, andererseits ein Anzeigegerät, meistens ein Bildschirm.

3.2. Repräsentationsformen natürlicher Phänomene in der Computergraphik

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Instanzen kann man auch formal ausdrücken. Den Ausgangspunkt bildet das physikalische Universum \wp . Die Eigenschaften von \wp sind erst formalisierbar, nachdem sie durch den Strom der menschlichen Wahrnehmungen I vermittelt wurden. Damit lassen sich mathematische Weltbeschreibungen M_i gewinnen. Das Streben nach Vereinigung aller M_i in eine geschlossene Form ist bis heute nicht gelungen, und es ist fraglich, ob eine solche Weltformel möglich oder wünschenswert ist. Darüber hinaus ist ein so universelles Objekt mengentheoretisch heikel, denn eine Menge, die sämtliche Mengen enthält, muss sich auch selbst enthalten. Und Selbstreflexivität ist berüchtigt für logische Widersprüche.

Dennoch ist die mathematische Formalisierung von Teilen der uns umgebenden Welt außerordentlich erfolgreich gewesen, wie z.B. die Schrödinger-Gleichung zur Charakterisierung atomarer Größenordnungen. Es gibt dabei keinerlei Belege, warum mathematische Weltbeschreibungen so treffsicher sein können oder ob sie eindeutig sind. Vielmehr erscheint es als erhebliche und unverständliche Gunst der Natur, dass derlei überhaupt funktioniert. So bemerkt der spätere Nobelpreisträger E. Wigner in seinem Aufsatz *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* [Wig60]:

„The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.“

Unter der Annahme fundierter M_i , wie z.B. der Beschreibung eines Elektrons im Kraftfeld eines Protons oder, wie hier später zu zeigen ist, der Schneebedeckung einer Szene, lassen sich zumindest näherungsweise Entsprechungen im Implementierungsuniversum C erzeugen. Der entscheidende Schritt ist dabei die Diskretisierung $d : M_i \rightarrow C_i$. Auch dieser Schritt ist nicht eindeutig. Von einer Implementierung kann man mit einer bestimmten Hardware aber zu einer graphischen Darstellung G gelangen, die sich beim menschlichen Betrachter schließlich als künstlich erzeugter Wahrnehmungsstrom I' manifestiert. Formal lässt sich also das Entwicklungsprinzip der computergraphischen Modellierung natürlicher Phänomene als

$$\begin{array}{ccccc} (\wp \rightarrow) & I & & I' & \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ & M_i & \xrightarrow{d} & C_i & \rightarrow G \end{array} \quad (3.1)$$

schreiben. Die formale Integration der menschlichen Wahrnehmung in maschinelle Kontexte - zusammengefasst im Fachgebiet der *Kybernetik* - erfreute sich in der Frühzeit der Computerentwicklung größerer Beliebtheit als heute. Wie die meisten umfassend orientierten Erklärungs- oder Modellierungsansätze sind inzwischen auch die kybernetisch orientierten Modelle aus der öffentlichen Aufmerksamkeit geraten und durch untergliederte Spezialgebiete ersetzt⁶. In Lehrbüchern über die Physiologie der menschlichen Sinne

⁶Solche Untergliederung ist in der Softwarearchitektur und in der militärischen Strategie äußerst beliebt, da es die Verwaltbarkeit erleichtert. Warum nur wird im Gegensatz dazu in den Medien so häufig über die Unübersichtlichkeit unserer immer komplexeren - oder sollte man besser sagen, immer mehr an Granularität gewinnenden - Welt geklagt?

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

finden sich bis in die 80er Jahre des vergangenen Jahrhunderts regelmäßig quantitative Abschätzungen zu den Informationsflüssen der Wahrnehmung (z.B. [Zim76, Kei85]). Keidel gibt eine Gesamtinputrate⁷ von 10^9 Bit/s an, Zimmermann in [Zim76] dagegen 10^7 Bit/s. Abgesehen von der deutlichen Abweichung der beiden Angaben ist ein Punkt besonders bemerkenswert: nämlich der bewusst-kognitive Anteil der Informationsströme. Er wird mit 10^2 bzw. 10 Bit/s, also um den Faktor 10^7 bzw. 10^6 kleiner angegeben. Diese Zahlen sind umso überraschender, als eine Bildfolge mit einer Datenrate von 100 bit/s offensichtlich unzureichend ist für realistische Darstellungen. Möglicherweise erklärt dieser Widerspruch die Zurückhaltung gegenüber kybernetischen Ansätzen in der Computergraphik. Fakt bleibt allerdings auch, dass der Zugriff auf die unbewussten bzw. impliziten Sinneseindrücke den Schlüssel zu jeder Art von Werbung [May00] oder unbemerkten Einflussnahme [Blo91] bildet.

Diese Thematik sowie die allgemeine Spezifikation aller Schritte von (3.1) übersteigen den Rahmen dieser Arbeit. Für den Kontext der Computergraphik lassen sich aber einige interessante Anschauungen ableiten.

Der vielverwendete Begriff des Realismus lässt sich jetzt allgemein als Differenz zwischen direkter (oder gemessener) Wahrnehmung I und technisch-virtuell reproduziertem Sinnesstrom I' fassen. Perfekte Immersion⁸ bedeutet im Schema (3.1), dass der Unterschied zwischen dem maschinellen Abbild der wirklichen Welt I und dem maschinellen Abbild der virtuellen Welt I' verschwindet. Die Grade der Abweichungen, z. B. im Visuellen, reichen von einfachen 2D-Bildern über stereoskopische Bilder bis zu holographischen Darstellungen.

3.3. Modellierungsmethoden im Überblick

In diesem Kapitel werden die prinzipiellen Methoden zur Modellierung natürlicher Phänomene in der Computergraphik vorgestellt. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt liegt hier der Schwerpunkt auf den grundsätzlichen Modellierungsmethoden, d.h. mit (3.1) gesprochen auf den Repräsentationen C_i und den Schritten von M_i nach C_i . Die Methoden sind in vier Gruppen unterteilbar, und zwar in

1. Methoden, die direkt auf der zu erzeugenden graphischen Darstellung operieren,
2. Methoden mit a priori festgelegten Diskretisierungen,
3. Methoden, die auf Kontinuumstheorien beruhen (wie die meisten physikalischen Modelle) und
4. Methoden, die auf Reduktionen von Kontinuumsmodellen beruhen.

Natürlich wird man in der Praxis vor allem Methodengemische finden und selten reine Fälle, aber zum leichteren Auffinden von Entwicklungsmöglichkeiten helfen die Idealfälle als Ausgangspunkt.

⁷D.h. Sehen, Hören, Tasten, Riechen und Schmecken zusammen.

⁸Von lat. *immergere*, für das Eintauchen in die virtuelle Welt.

3.3.1. Bildbasierte Methoden

Bildbasierte Methoden setzen direkt an der graphischen Ausgabe an. Die Implementierungen C_i ergeben sich hier aus den Anforderungen des Ausgabegerätes G und nicht aus physikalischen Abstraktionen. Die Methoden entsprechen der zweidimensionalen Computergraphik. Dem Ausgabeergebnis muss man diese Herkunft nicht ansehen, denn Fotorealismus bezieht sich nur auf 2D-Bilder. Beispiele dafür sind vor allem in der Frühzeit der computergraphischen Modellierung und bei sehr spezifischen Anwendungen zu finden. Ein Beispiel ist noch heute auf manchen Macintosh-Systemen als Bildschirmschoner zu finden: Schneeflocken lagern sich dort auf Kanten von Fenstern und Icons ab. Ansonsten sind die Methoden etabliert beim Rendern und bei der Beleuchtung von Szenen [SLK04], oder zum Teil auch bei der Gesamtmodellierung von Szenen [KRN97, Haw04]. Daneben gehören indirekt auch alle Modellierungsanteile zu dieser Klasse, die in irgendeiner Weise mit Texturen arbeiten.

Der Hauptnachteil bildbasierter Methoden liegt in ihrer geringen Interaktivität. Wenn die virtuelle Welt nur als 2D-Abbild behandelt wird, dann ist es nicht ohne weiteres möglich, einen dynamisch-immersiven Eindruck herzustellen.

3.3.2. Diskretisierungsbasierte Methoden

Methoden dieser Klasse beruhen auf Aufteilungen der virtuellen Welt, die vor der eigentlichen Simulation festgelegt werden. Solche Ansätze passen sehr gut zur Struktur einer Implementierung C_i und zur Struktur der Verarbeitung auf der Graphikkarte. Einem Diskretisierungspartikel der Simulation entsprechen logische bzw. programmier-technische Objekte der Implementierung. Die Wechselwirkungen zwischen den Partikeln können aber trotzdem kontinuierlich sein.

Partikelbasierte Methoden

Eine wesentliche Art der Diskretisierung besteht in der Zerlegung der simulierten Welt in punktförmige Partikel. Die Methode ist vielseitig anpassungsfähig, weil viele Materialien und Phänomene als Partikelgranulate beschreibbar sind. Partikelsysteme lassen sich auch näherungsweise auf der GPU realisieren, indem man jedem Vertex ein Partikel der Diskretisierung zuweist. Granulare Materialien können auch auf diese Weise modelliert [KSW04, VC07, Lat08] werden.

Ein Vorteil der Partikelsysteme besteht in der Verwandtschaft zur Newton'schen Mechanik der Massenpunkte. Die Newton'sche Punktmechanik bietet einen reichen Fundus an theoretischem Werkzeug, die sich zur computergraphischen Anwendung eignen. Die Geschwindigkeitsänderung $\partial_t \vec{v}_i$ des Partikels i eines n -Teilchensystems ergibt sich dabei als Summe über alle auf es wirkenden Kräfte F als

$$\partial_t \vec{v}_i = \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ext} \right), \quad (3.2)$$

wobei m_i die Masse des Teilchens ist, \vec{F}_{ext} die Summe aller externen Kräfte und \vec{F}_{ij} die

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

Kraft zwischen den Partikeln i und j . Im allgemeinsten Fall können die Kräfte komplexe Orts- und Geschwindigkeitsabhängigkeiten enthalten oder auch Zwangskräfte zur Einhaltung von Randbedingungen. Wie in der klassischen Mechanik haben sich auch in der Computergraphik Formulierungen bewährt, die auf der Variationsrechnung beruhen. Dabei ergeben sich Partikeltrajektorien als Minima einer zeitintegrierten Energiefunktion nach dem Hamilton'schen Prinzip der kleinsten Wirkung.

Starrkörperbasierte Methoden

Eine andere Art der a-priori-Diskretisierung enthält anstelle von Punkten ausgedehnte, starre Punktverbünde als kleinste Einheit. Wiederum sind die Ecken dieser Verbünde oder Starrkörper leicht zu formalisieren. Die visuelle entscheidende Dynamik wie etwa Kollisionen kann sich jedoch zwischen den Punkten abspielen. Die Kollisionserkennung ist aufwändig, sie bedarf möglicherweise auch dynamischer Diskretisierungsanpassung. Starre Verbindungen zwischen Partikeln erzeugen zudem einen neuen Freiheitsgrad der Rotation. Unveränderliche Starrkörper-Diskretisierung kommen in der Praxis vor allem dann vor, wenn man die Partikelverbünde auf sehr wenige Partikel einschränkt (siehe z.B. [VC07]). Formal lässt sich die Schreibweise von (3.2) übernehmen, indem die Kräfte \vec{F}_{ij} und \vec{F}_{ext} entsprechend parametrisiert werden. Die Einträge der Matrix der inneren Kräfte \vec{F}_{ij} hängen dann von den Abständen $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ zwischen den Partikeln ab, Kollisionen stecken formal in den äußeren Kräften F_{ext} . Daneben gibt es eine ganze Reihe von Schreibweisen, die besser auf den Fall starrer Verbünde angepasst sind, z.B. die Formulierung einer Rotation mit Hilfen von Quaternionen [Sho85].

Eine derzeit verbreitete Modellierungsmethode dieser Klasse ist die sogenannten Diskrete-Elemente-Methode, abgekürzt DEM. Die Methode stammt ursprünglich aus der Moleküldynamik. Sie kombiniert Partikelsysteme mit einer Auswahl von Starrkörpereigenschaften. Damit lässt sich zu Beispiel das Phänomen der Kontaktreibung effizient approximieren [CS79].

3.3.3. Kontinuumsbasierte Methoden

Offensichtlich enthält die Natur auch Aspekte, die sich einer festen Diskretisierung entziehen. Dazu gehört zum Beispiel Wasser. Um solche sowohl zeitlich als auch räumlich kontinuierlichen Phänomene computergraphisch zu simulieren, hilft eine differentiell-kontinuierliche Beschreibung. Hier stehen ausgereifte physikalische Formalismen in Form von Differentialgleichungen zur Verfügung. Typische kontinuierliche Phänomene sind die Weichkörperdeformation und die Bewegung von Fluiden. Zur Modellierung dynamischer Effekte ist die Differentialgleichung die genaueste Methode und wohl auch für die Computergraphik ideal. Differentialgleichungsbeschreibungen sind am effizientesten für homogene Stoffe mit wenigen diskontinuierlichen Grenzen. Eine wesentliche Grundgleichung ist jeweils die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.3)$$

Sie sagt aus, dass die Dichte ρ eines Mediums sich nur dort ändert, wo die Divergenz des Massentransports $\rho \vec{v}$ nicht verschwindet. Dieser Satz wurde bereits von Newton definiert. Bemerkenswerterweise zieht er als Beispiel eines kompressiblen Materials *Schnee* heran ([New87], Definition 1). Mit der Kontinuitätsgleichung lassen sich zusammen mit weiteren kinetischen Entwicklungsgleichungen, wie etwa der Navier-Stokes-Gleichung für Fluide, eindeutige Lösungen bestimmen. Deren explizite Angabe bedarf fast immer der diskretisierten numerischen Lösung, allerdings mit Vorteil adaptierbarer Gitterweiten (z. B. [KFCO06]). Die Spezifikation von Rändern ist dabei die schwierigste Aufgabe. Bei der Fluidsimulation gehören dazu auch Fluidgrenzflächen wie z.B. Wasseroberflächen.

Interessanterweise folgen auch stochastische⁹ Partikelsysteme einer kontinuierlichen Erhaltungsgleichung. Für solche Systeme gibt die sogenannte Liouville-Gleichung die vollständige Dynamik an. Die stochastische Modellierung stellt bis zum heutigen Tage die umfassendste Art der Weltmodellierung dar. In den meisten Fällen kann man eine deterministische makroskopische Struktur feststellen, in die mikroskopisch eine turbulente Skala eingebettet ist. Die Dissertation von Jos Stam befasst sich mit diesem Thema [Sta95] im Hinblick auf die computergraphische Modellierung. Wie weiter hinten in dieser Arbeit zu zeigen ist, lässt sich auch die Schneeverteilung mit diesem Prinzip modellieren.

3.3.4. Modellreduktionsmethoden

Wenn es gelingt, stochastische Vielteilchensysteme in deterministischen Makrovariablen auszudrücken, dann handelt es sich um eine sogenannte Modellreduktion. Aus einer großen Anzahl von Freiheitsgraden wurden einige wenige globale Variablen extrahiert und zueinander in Beziehung gesetzt, so dass die mikroskopischen Bedingungen im Mittel zutreffend repräsentiert sind. Das klassische Beispiel für diese Vorgehensweise ist die Herleitung der Zustandsgleichung des idealen Gases aus dem mikrokanonischen Ensemble.

Auch manche Partikelsimulationen sind eigentlich Modellreduktionen, da den virtuellen Partikeln nicht zwangsläufig reale Partikel entsprechen. Die sogenannte *smoothed particle hydrodynamics* ist ein Beispiel dafür. Häufig fehlt jedoch die formale Beziehung zu einer exakten Gesamtbeschreibung, z. B. bei der Schneesimulation mit Metaballs [NIDN97] oder mit virtuellen Schneeflocken [Fea00a].

Im engeren Sinn bezieht sich der Begriff Modellreduktion auf statistische Klassifikationsverfahren, die auf großen Simulationszeitreihen angewendet werden. An die Stelle von a priori Diskretisierungen werden statistisch fundierte a posteriori Diskretisierungen gesetzt. Das methodische Prinzip lässt sich anhand der Hauptkomponentenanalyse¹⁰ kurz skizzieren¹¹. Ein großer Eingangsdatensatz mit N Datenpunkten zu N Zeitschritten in Form einer $N \times N$ -Matrix \mathbf{C} wird dabei in ein neues Koordinatensystem überführt. \mathbf{C} enthält dabei die Korrelationen zwischen den einzelnen Datenpunkten. Die neue Basis ist so gewählt, dass die neue Form \mathbf{C}' von \mathbf{C} eine Diagonalmatrix ist¹², bei der auf der

⁹d.h. unscharfe bzw. nicht-deterministische.

¹⁰Abgekürzt meist als PCA für *Principal Component Analysis*.

¹¹Für genaue Einführung sei an Lehrbücher zur Datenanalyse verwiesen.

¹²Für symmetrische \mathbf{C} ist das immer möglich.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

Diagonalen die Eigenwerte der Größe nach geordnet sind. Die zugehörigen Eigenvektoren entsprechen kollektiven Schwingungsmustern. Es zeigt sich, dass meistens einige wenige Eigenvektoren genügen, um einen Großteil der Varianz einer Zeitreihe zu erklären. Diesen Fund kann man nun zur Simulationskompression benutzen. Jeder Zustand in einer Zeitreihe kann auf die reduzierte Basis projiziert werden. Zur Simulation auf der reduzierten Basis braucht man außerdem den dimensionsreduzierten Zeitentwicklungsoperator. Der allgemeine Fall einer solchen Projektion wird als Galerkin-Projektion bezeichnet. Hier gibt es keine allgemeingültige Vorgehensweise. Neben der Hauptkomponentenanalyse gibt es jedoch noch einige andere Techniken der Modellreduktion. Beispiele hierfür sind die nichtlineare Hauptkomponentenanalyse (auch Kern-PCA) genannt [SMS99] und sogenannte *diffusion maps* [CLL⁺05]. Diese Techniken sind alle bewährt für die Analyse. Für die Synthese erwies sich bisher aber vor allem die PCA als brauchbar. Ein Beispiel für die Modellreduktion mittels Hauptkomponentenanalyse in der Fluidsimulation findet sich in [TLP06], die Anwendung zur Animationskompression in [AM00]. Für die Kern-PCA gibt es auch einen Versuch [BWS04], es bleibt aber unsicher ob sich der hohe Rechenaufwand jemals für visuelle Anwendungen rentieren wird.

Grundsätzlich stellt die Methode der Modellreduktion aber einen systematischen Rahmen, um aus komplexen physikalischen Modellen computergraphisch relevante Aspekte zu extrahieren. Diese Vorgehensweise ist mutmaßlich zukunftsfähig. Möglicherweise werden sich in Zukunft ähnliche Ansätze zur systematischen Ausnutzung spezifischer Wahrnehmungsprinzipien heranziehen lassen. Derlei liefe in fernerer Zukunft z. B. darauf hinaus, Fotos ohne Schnee mit Hilfe einer großen Sammlung beschneiter Szenen automatisch zu beschneien. *Example*-basierte Methoden könnten sich vermutlich auch gut mit *perception*-basierten Methoden (d. h. menschlichen Erfahrungswerten für beschneite Szenen) kombinieren. Womöglich wird sich das Prinzip der Dimensionsreduktion auch eines Tages anstelle der Weltformel als verbindendes Prinzip zwischen den einzelnen Theoriegebäuden erweisen (wie in [LP00] angedeutet).

3.3.5. Interaktionsmethoden

Als Bewertung des Realitätsgrades der Interaktion mit einer virtuellen Welt lässt sich auch das Schema (3.1) verwenden. Die Interaktion gehört im engeren Sinne nicht zur vorangegangenen Zusammenstellung, der Vollständigkeit halber soll sie hier jedoch kurz erwähnt werden. Je ähnlicher eine Aktion eines Benutzers in der realen Welt zur entsprechenden Aktion in der virtuellen Welt, desto realistischer die Modellierung. Haptischen Interaktionsgeräte, wie z. B. das sog. *rumble pack* an der Playstation der Firma Sony sind Beispiele für höhere Immersionsgrade. Ein weiterer Ansatz besteht auch darin, den Computer mehr der direkten menschlichen Wahrnehmung anzunähern, d.h. ihn praktisch unsichtbar werden zu lassen und mit der gewohnten Umgebung ohne Computer verschmelzen zu lassen (vgl. *The Invisible Computer* [Nor98]). Offensichtlich gehört zu Benutzerschnittstellen, die im Mimikry mit der Wirklichkeit verborgen sind, auch eine gute Modellierung natürlicher Phänomene. Hardwareunabhängig gibt es zwei prinzipielle Methoden, um die Benutzeraktionen in die virtuelle Welt zu übertragen: 1. direkt, d. h. per instantaner Manipulation und 2. indirekt per Übertragung der Aktion in virtuelle

Tendenzen. Der erste Weg entspricht physikalisch dem harten Setzen von ortsabhängigen Größen wie z. B. Massenverteilungen. Der zweite Weg entspricht dem Setzen von ersten oder zweiten Zeitableitungen ortsabhängiger Größen. Direkte Übertragung ist zwar leicht zu implementieren, hat aber den Nachteil, dass sie zu sehr heftigen Reaktionen in der virtuellen Welt führen kann (etwa bei der Korrektur von Durchdringungen). Die indirekte Übertragung entspricht dagegen eher den wirklichen Verhältnissen z. B. wie beim Heben eines Armes: Um den Arm in eine neue Lage zu bringen, muss man ihn zuerst beschleunigen.

3.4. Klassifikation der natürlichen Phänomene in der Computergraphik

Das Überthema dieser Arbeit ist die Modellierung natürlicher Phänomene für virtuellen Welten, die auf heutigen Heimcomputern realisierbar ist¹³. Wie schon dargelegt, bedarf die Benutzerschnittstelle bestehend aus Maus, Bildschirm, Tastatur und Lautsprechern offenbar der Fantasie und der Abstraktion, damit sich dort natürliche Phänomene überhaupt modellieren lassen.

Was aber sind überhaupt natürliche Phänomene? Auf den ersten Blick erscheint die Frage banal. Alles, was eben draußen in der Natur zu sehen ist, und alles, wo kein Mensch seine Finger im Spiel hat. Demnach wäre frisch gefallener Schnee auf einem Autodach noch Natur, ein Schneeball aus diesem Schnee jedoch nicht mehr. Was aber, wenn sich ein Schneeball an einem kleinen Abhang aus Pappschnee von selbst gebildet hat? Und wir aber fälschlich annehmen, jemand anders hätte den Schneeball geformt? Dann hinge es nur von der subjektiven Wahrnehmung ab, was ein natürliches Phänomen ist und was nicht. Diese Sichtweise läuft auf die Frage hinaus, ob die menschliche Wahrnehmung selbst als interaktives Phänomen Teil der Natur ist oder nicht. Sie ist offenbar nicht leicht entscheidbar, und es wäre ein eigenes Forschungsthema, hier genauere Erkenntnisse zu sammeln. Für die vorliegende Arbeit ist die computergraphische Modellierung natürlicher Phänomene wie folgt definiert:

Das Ziel der computergraphischen Modellierung natürlicher Phänomene ist die Virtualisierung der menschenunberührten, nichtbelebten Welt zur Erzeugung glaubhafter Eindrücke, d.h. die Entwicklung glaubhafter technischer Repräsentationen der wirklichen Welt.

Offensichtlich fällt jede Form des entschlüsselbaren künstlerischen Ausdrucks auf den ersten Blick auch in diese Definition. Entscheidend ist aber der Ausdruck *technische Repräsentationen*. Es geht nicht wie in der Kunst um traumwandlerisch subjektive Zusammenstellung von Eindrücken, sondern um technische Realisierungen der Eindrücke. Auf der anderen Seite müssen sich die technischen Repräsentationen aber nicht wie in der Physik grundsätzlich per Messung bewähren. Es genügt akute Glaubwürdigkeit, bzw. die Ähnlichkeit der Ströme I und I' aus (3.1) unabhängig von mathematischen Repräsentationen M .

¹³Weiter oben als virtuelle Schreibtischrealität oder *desktop virtual reality* bezeichnet.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

Statische Phänomene	Dynamische Phänomene	Zusammengesetzte Phänomene
Geometrieerhaltend <i>Schmutz, Patina, Kratzer, Oberflächenverwitterung</i>	Volumenbezogen <i>Wasser, Rauch, Feuer, Funken</i>	Topologieverändernd <i>Brüche, Risse, starr-plastischer Fluss</i>
Geometrieverändernd <i>Erosion, Korrosion, Materialanlagerung</i>	Topologieerhaltend <i>Elastische und plastische Materialien, Textilien, granulare Materialien</i>	Innere Wechselwirkungen <i>Nasser Sand, Elastische Materialien mit starren Bereichen, Fluidmischung, ...</i>

Abbildung 3.2.: Arbeitsklassifikation zur Übersicht über die computergraphisch modellierbaren natürlichen Phänomene.

Mit dieser Definition lässt sich etwas Klarheit in die babylonische Zerklüftung der computergraphischen Literatur zur Modellierung natürlicher Phänomene bringen. Es wird nun der Versuch unternommen, eine Klassifikation natürlicher Phänomene in virtuellen Welten zu entwickeln. Für die virtuelle Schreibtischrealität steht immer die Frage nach der Abbildbarkeit eines Phänomens in Form und Farbe auf dem Bildschirm¹⁴ und in Interaktionsfähigkeit mit Maus und Tastatur. Die visuelle Überzeugungskraft spielt dabei die tragende Rolle, d.h. der Teil von *I*, der über die Augen wahrgenommen wird.

Es lassen sich drei große Gruppen von Phänomenen voneinander abgrenzen (siehe Abb. 3.2): statische Phänomene, die ohne Zeitverlauf modellierbar sind, dynamische Phänomene, die ohne Zeitverlauf nicht sichtbar sind, und zusammengesetzte Phänomene, die aus verschiedenen Komponenten bestehen. Die Eigenschaften der drei Gruppen werden im Folgenden anhand von Beispielen unter besonderer Berücksichtigung des Schnees dargestellt. Den Abschluss bildet ein kurzer Überblick über Phänomene jenseits der vorgeschlagenen Klassifikation. Die Auswahl der zitierten Arbeiten ist dabei beispielhaft und keinesfalls als erschöpfend zu betrachten.

3.4.1. Statische Phänomene

Die erste Gruppe von Phänomenen lässt sich unter dem Oberbegriff *zeitlich unveränderlich* zusammenfassen. Dazu gehören die Naturerscheinungen, deren Dauer oder Entstehung die Dauer des Auftretens in einer virtuellen Szene deutlich übersteigt. Sie lassen sich unterteilen in geometrieerhaltende und geometrieverändernde Phänomene.

Geometrieerhaltende, statische Phänomene

Die Texturierung von Oberflächen durch Materialalterung ist das Hauptbeispiel für die geometrieerhaltende Untergruppe. Die Alterung bewirkt eine Veränderung der optischen Oberflächeneigenschaften, indem sich auf metallischen Flächen beispielsweise eine Patina bildet. Dabei gibt es sowohl Methoden, die stärker an die physikalischen oder chemischen

¹⁴Geräusche sind des geringen Umfanges wegen nicht direkt behandelt.

Generationsprozesse angelehnt sind, als auch Methoden ohne Annahmen über den Entstehungsprozess. Physikalisch motiviert ist beispielsweise der sogenannte γ -ton Ansatz von Chen et al. [CXW⁺05]. Die Alterungstextur wird durch Partikel erzeugt, die Material durch die Szene transportieren. Diese Partikel werden zusammengefasst als γ -tons bezeichnet, um z.B. Oberflächenkorrosion oder Fließspuren darzustellen.

Methoden ohne Annahmen zum Entstehungsprozess beruhen stattdessen entweder auf prozeduralen oder auf statistischen Ansätzen. Am weitesten verbreitet sind dabei prozedurale Ansätze, die immer wieder auf irgendeine Weise auf dem Prinzip des Fraktals beruhen, d.h. auf der Ähnlichkeit eines Musters mit sich selbst auf unterschiedlichen Größenskalen. Der berühmteste Algorithmus zur Erzeugung verwitterter Oberflächentexturen ist das sogenannte Perlin-Rauschen [EMP⁺98], bei dem unterschiedliche Frequenzen überlagert und geglättet werden. Es deutet tatsächlich einiges daraufhin, dass zur statischen Beschreibung natürlicher Oberflächen das Fraktal die genaueste mathematische Beschreibung ist [Man83]. Eine neuere und inzwischen sehr verbreitete Methode ist die statistische Extraktion von Charakteristika aus großen Messdatenmengen (siehe dazu Kap. 3.3.4). Ein Beispiel dafür ist die Extraktion typischer Rost- und Patinamuster aus sehr vielen Fotos [LGG⁺07]. Dabei wurden aus verschiedenen Alterungsversuchsreihen mit Hilfe sogenannter *diffusion maps* typische Muster klassifiziert, die sich auf beliebige Geometrien übertragen ließen.

Mérillou et al. [MG08] geben einen Überblick über Alterungs- und Verwitterungsphänomene in der Computergraphik. Sie berücksichtigen zusätzlich auch kleinräumige, meist auch in Texturen gehaltene Geometrieänderungen. Die optischen Eigenschaften des Schnees sind für die Computergraphik noch nicht erschöpfend erschlossen (siehe ausführlich Kap. 5), obwohl hier reiche Formenschätze zu heben wären.

Geometrieerzeugende, statische Phänomene

Als statisches Phänomen fällt der Schnee allerdings eher in die geometrieverändernde Untergruppe. In dieser Untergruppe sind alle Phänomene versammelt, die vor der Betrachtung einer virtuellen Szene deren Oberflächen verschieben und eventuell neue erzeugen. Es kann sich dabei destruktiv um großräumige Erosion oder kleinräumige Korrosion handeln oder konstruktiv, z. B. um Eiszapfen, Schnee oder Terrainbildung. In dieser Untergruppe beruhen die meisten Ansätze auf Näherungen physikalischer Modelle. Die Erosion wird zum Beispiel bei Neidhold et al. [NWD07] über eine explizite Fluidsimulation modelliert. Wasser fließt auf einer zweieinhalbdimensionalen Höhenkarte in Richtung der Hangabtriebskraft und trägt einen Teil des Untergrundes als Dispersion oder in Lösung mit sich. Sinkt die Fluidgeschwindigkeit unter einen Grenzwert, lagert sich das Sediment wieder ab. Wojtan et al. [WCMT07] verfolgen einen ähnlichen Ansatz, allerdings werden Oberflächen hier volumetrisch mit einer Level-Set-Funktion aufgefasst und der Schwerpunkt liegt auf der kleinerskaligen Korrosion.

Umgekehrt gibt es auch Phänomene, die Oberflächen neuer Volumina bewirken. Neben dem ausführlich in Kapitel 5 behandelten Schnee gibt es noch einzelne Beispiele für diese Klasse. Das Wachstum von Eiszapfen gehört dazu. Kim et al. [KAL06] modellieren es ausgehend von einem analytischen Ansatz zur Beschreibung von Phasengrenzen. Daraus

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

leiten sie eine näherungsweise Lösung her, die sie vor dem Rendern noch mit ästhetisch motiviertem Rauschen verziern.

3.4.2. Dynamische Phänomene

Die Gruppe der dynamischen Phänomene stellt den am stärksten beachteten Bereich in der computergraphischen Literatur dar. Denn mit der Sichtbarkeit eines Zeitverlaufs während der Beobachtungszeit erscheint auch die Möglichkeit der Interaktion. Die Interaktionsfähigkeit wiederum erfordert schnelle Berechnungsdauern, und die lässt sich nur zu Lasten der Rechengenauigkeit erzielen. Daher muss jede Modellierung eines dynamischen Phänomens immer einen Kompromiss zwischen Interaktionsfähigkeit und Rechengenauigkeit eingehen, wobei die Rechengenauigkeit meistens dem Realitätsgrad entspricht.

Grundsätzlich kann man zwei Untergruppen dynamischer Phänomene erkennen: Einerseits Phänomene, die sich innerhalb eines Modellierungsgitters frei verteilen können und die als Eigenschaft innerhalb eines Volumens auftreten, und andererseits Phänomene, die sich auf Form und Lage von Körpern mit fester Topologie beziehen. Methodisch durchlaufen beide Untergruppen meistens sehr ähnliche Entwicklungsphasen: von phänomenologischen Pionieransätzen über langsame, physikalische Ansätze zu statistisch ermittelten Näherungslösungen oder partikelbasierten Modellen.

Dynamisch-volumenbezogene Phänomene

Ein großer Anteil computergraphischer Naturmodellierung behandelt die Fluidsimulation. Fluide sind Eigenschaften eines Volumens, und sie treten in Erscheinung, indem sie sichtbare Substanzen oder Partikel mit sich führen. Nach einer Vielzahl von Vorarbeiten mit phänomenologischen Ansätzen (z.B. [Pea86]) zeigte sich bald die Wirksamkeit physikalisch fundierter Herangehensweisen. Für die Fluide ist das die Navier-Stokes-Gleichung, in der Computergraphik spätestens seit der Rauchsimulation von Foster et al. [FM97] fester Bestandteil aller fotorealistischen Fluidsimulationen. Entscheidend beruht hier der Fortschritt auf effizienten Integrationsmethoden (z.B. [Sta99b]). Bei der Simulation von Fluidgrenzflächen wird die Störanfälligkeit der Verfahren gegen zu grobe räumlich und zeitliche Auflösung so kritisch, dass nur noch heuristische Ansätze befriedigende Ergebnisse liefern. Genau genommen handelt es sich hier schon um ein Problem der Verbindung verschiedener Modellregimes (siehe Kap. 3.4.3). Prinzipiell werden Hilfspartikel (z.B. [FM96]) oder Hilfsgeometrien (sog. Level-Set-Funktionen, siehe z.B. [FAMO99]) eingesetzt. Für Fluidvolumina steht inzwischen auch eine statistisch extrahierte Modellreduktion von Treuille et al. [TLP06] zur Verfügung.

Granulare Materialien lassen sich ähnlich wie Fluide modellieren, allerdings tritt das Phänomen der Turbulenz nicht auf. Dadurch erlauben bereits phänomenologische Ansätze wirksame Ergebnisse. Bei Onoue et al. [ON05] beispielsweise wird eine Sandoberfläche mit einem Höhenfeld dargestellt, eng verwandt mit einigen frühen Arbeiten zur Fluidsimulation. Mit dieser Methode lässt sich auch interaktiver Schnee darstellen.

Ein weiteres Phänomen gehört trotz spärlicher Beachtung auch in die Untergruppe der

volumenbasierenden Erscheinungen: Es ist die elektrische Entladung. Nach phänomenologischen Vorarbeiten [RW94] wurden inzwischen auch hier physikalisch motivierte sowie dimensionsreduzierende Ansätze [MFC06] vorgeschlagen. Schließlich gehören alle Formen des Niederschlages auch hierher, so zum Beispiel Schneefall und Regen ([LZK⁺04] sowie Kap. 5).

Dynamisch-topologieerhaltende Phänomene

Eine Aufgabenstellung, die vor allem in der Robotik auftaucht, betrifft die Erkennung und Behandlung von Kontakten zwischen verschiedenen festen oder elastischen Körpern. Anders als volumenbezogene Phänomene steht hier die Grundform der beteiligten Bestandteile fest. Die Modellierung von Starrkörpern ist aber auch in der Computergraphik ein wesentlicher Bestandteil zur Gestaltung virtueller Welten. Schon früh bildeten analytische Methoden das Fundament der Modelle [Bar89]. Außer verschiedenen Detailoptimierungen (z.B. [Bar94]) kann man zur Effizienzsteigerung bis heute nur auf wechselwirkende Partikel ausweichen (z.B. [BYM05]). Streng genommen existieren jedoch keine vollkommen starren Starrkörper. Jeder Körper wird unter Spannung wenigstens mikroskopisch die Form wandeln. Wenn er im Gegensatz zu Fluiden ohne Spannung seine Ausgangsform zurück erlangen kann, dann handelt es sich um elastische Phänomene. Diese Untergruppe ist in der Elastizitätstheorie der theoretischen Physik und im Ingenieurwesen gründlich untersucht. In die Computergraphik fanden die mathematischen Grundlagen durch Terzopoulos et al. [TPBF87] Eingang, verbessert durch Vorarbeiten zur Berechnung von Kurven und Flächen aus Stützpunkten. In der Folge wurden viele weitere numerische Verbesserungen vorgeschlagen, Methoden der finiten Elemente. Ein Nebebereich elastischer Phänomene ist die Textilmodellierung. Obwohl er nicht mehr direkt zu den natürlichen Phänomenen gehört, kann man auch dort die typischen Grundansätze gut erkennen: frühe phänomenologische Arbeiten [Wei86], dann ausgehend von [TPBF87] wie oben ein physikalisch vereinfachtes und fest diskretisiertes Modell [Pro95], und schließlich auch statistische Extraktion ausführlicher Modelle [JF03].

Sowohl für volumenbezogene als auch für topologieerhaltende Phänomene gibt es ein gemeinsames Näherungs- bzw. Diskretisierungsprinzip: die Modellierung auf Basis von Partikeln, in der Computergraphik wohl erstmals von Reeves [Ree83] angewandt. Die Grundeinheit eines einzelnen Partikels ändert weder Form noch Topologie, und in den Kräftebeziehungen der Partikel zueinander lassen sich sowohl Fluidkohäsion als auch elastische Verbindung darstellen. Darüber hinaus sind Partikelsysteme relativ leicht zu implementieren. Solenthaler et al. [SSP07] schlagen daher Partikelsysteme zur einheitlichen Behandlung von Fluid und Starrkörpern vor. Dieser Ansatz bietet offenbar noch große Spielräume, allerdings ist die Starrkörper-Kollisionsbehandlung nicht allgemein lokal lösbar, so dass die Berechnungseffizienz wohl ein Engpass bleiben wird. Dies ist auch der Grund, warum nur Schneefall, nicht aber Schneeverteilungen auf dem Boden mit Partikeln simuliert wird: es wären extrem viele Einzelpartikel zu verarbeiten (siehe Kap. 5).

3.4.3. Zusammengesetzte Phänomene

Die anspruchsvollste Aufgabe der computergraphischen Modellierung natürlicher Phänomene ergibt sich bei der Verbindung verschiedener Modellierungsregimes. Diese Verbindung entspricht einerseits der Verbindung zweier nicht-interaktiver Simulationsansätze und andererseits der Benutzerinteraktion mit einem dynamischen Phänomen. Die theoretische Herausforderung rührt aus der Schwierigkeit, für mehrere separate Subsysteme einen gemeinsamen formalen Rahmen zu entwickeln. Die gleiche Schwierigkeit, nämlich die Suche nach dem übergreifenden Urprinzip bestimmt bis heute auch die elementaren Teile der theoretischen Physik: Lassen sich die vier Grundkräfte einheitlich aus einer Theorie heraus erklären? Wenn dies tatsächlich eines Tages gelingen sollte, dann könnte man alle Erscheinungen der Natur mittels einer einzigen Logik reproduzieren. Für die Naturphänomenmodellierung in der Computergraphik bedeutete es, dass man jedes beliebige Phänomen in einer Logik ausdrücken könnte und folglich auch auf einem Computer erzeugen könnte.

Davon ist die Menschheit durchaus noch weit entfernt. Denn das Optimum der Simulation kann nichts Besseres erzeugen als ein Welt-Abbild, das der wirklichen Welt zum Verwechseln ähnelt. Angenommen es gäbe solch einen perfekten Simulator. Jedem Atom der Wirklichkeit entspräche dann genau ein Simulator-Atom. Offensichtlich wäre das kein besonders brauchbarer Simulator. Man könnte stattdessen direkt ein Experiment in der wirklichen Welt durchführen.

Für die Computergraphik bedeutet die Verbindung von Modellierungssystemen also auch weiterhin ein vielseitiges Betätigungsfeld. Es werden immer Annäherungen bleiben, aber jede neue Näherung kann erstaunliche Aspekte hervorbringen. In der bisherigen Literatur lassen sich zwei Untergruppen von zusammengesetzten Phänomenen abgrenzen: Zusammenführungen, die sich aus zwei Teilen vor und nach einzelnen topologieverändernden Ereignissen ergeben, sowie grundsätzlich hybride System, die andauernd miteinander im Austausch stehen. Jede Nahtstelle von einem Subsystem zum anderen kann auch für Benutzerinteraktion erschlossen werden. Das Vorbild beider Untergruppen stellt die Problematik der Randbedingungen bei der Fluidsimulation. Robert Bridson bezeichnet dies in [Bri08] als den heikelsten Punkt der Fluidsimulation. Denn an den Rändern zeigt sich die Schwierigkeit geeigneter Diskretisierung am deutlichsten, weil Fluidgrenzen im Normalfall nicht mit Diskretisierungszellgrenzen zusammenfallen.

Die folgende Vorstellung der zusammengesetzten Phänomene geschieht nur überblicksartig, weil das Grundproblem des Grenzüberganges nicht beschränkbar ist auf konkrete Phänomengruppen, sondern prinzipiell ubiquitär auftreten kann, ähnlich wie in der Physik die Phasenübergänge.

Topologieverändernde Phänomene

Der einfachste Fall des Phänomenübergangs ergibt sich aus der plötzlichen Topologieveränderung, wenn ein einzelner Körper in kleinere Teile zerbricht. Die Modellierung des Starrkörpers muss durch Bruch oder Riss in die Modellierung vieler Körper überführt werden. Die Situation vor und nach dem Bruch ist gut modellierbar, die Bruchbildung

selbst allerdings nicht. Die grundsätzliche Schwierigkeit besteht darin, dass es zwar für Brüche im Allgemeinen fundierte statistische Modelle und Spannungsschwellwerte gibt, der besondere Einzelfall eines Bruches aber nicht verlässlich vorhersagbar ist. Aufgrund der fraktalen Struktur von Brüchen lässt sich auch keine allgemeingültige Diskretisierung modellieren oder vorhersagen: unmessbar kleine Materialverunreinigungen können beim Bruch makroskopisch sichtbar werden. Dieses Problem ist theoretisch bisher ungelöst. Daher gibt es in diesem Bereich auch in der Computergraphik nur phänomenologisch-heuristische Ansätze, von den ersten Arbeiten (z.B. [TF88]) bis heute (z.B. [BHTF07]).

Fundiertere Modelle existieren für den Übergang zwischen fest und flüssig. Basierend auf einer Fluidsimulation modellieren Zhu et al. [ZB05] die festen und fließenden Teile einer Menge nassen Sandes. Der Phasenübergang von flüssig nach fest, d.h. statistisch gesehen das sprunghafte lokale Ansteigen der mittleren Korrelationslänge, wird wie bei den Brüchen über die lokalen, aber global verglichenen Spannungsverhältnisse eingeleitet. Die gemeinsame Modellierungsbasis bildet dabei wie fast immer in diesem Bereich seit [Sta99b] eine geschickte Kombination aus partikel- und gitterbasierten Ansätzen.

Der Übergang von fallendem Schnee zu messbaren Schneeeauflagen bedarf eines verwandten Modellwechsels. Augenscheinlich wäre die gemeinsame Basis die einzelne Schneeflocke, doch bisher reichen die modellierbaren Partikelanzahlen nicht aus (Details dazu in 5).

Wechselwirkende Kompositphänomene

Die letzte klassifizierte Untergruppe umfasst Phänomene, die durch den dauernden Austausch zwischen Modellierungsregimes gekennzeichnet sind. Das typische Beispiel dafür ist die bereits erwähnte Modellierung freier Fluidoberflächen. Die bisher besten Ergebnisse, sowohl aus mathematischer wie auch aus computergraphischer Sicht, ergeben sich aus dem Zusammenspiel zwischen partikelbasierten und gitterbasierte Ansätzen [EFFM02]. Eine typische Struktur günstiger Zusammensetzungen gibt sich dabei kaum zu erkennen.

Für die Kombination von flüssigen, festen und gasförmigen Phänomenen erscheinen theoretisch noch undurchschaubarere Arbeiten. Deren Hauptstärke liegt dafür in der visuelle Überzeugungskraft [LIG06].

Die Kombination von elastischen Festkörpern mit Starrkörpern tritt vor allem bei der Kombination von Textilien mit animierten Charakteren auf, und auch hier gibt es keine Standardlösung. Letzten Endes laufen die Bemühung zur Kombination möglichst vieler Phänomene in einem maschinellen Rahmen¹⁵ auf genau das hinaus, was in den meisten Computerspielen¹⁶ in immer wieder neuen Farben und Formen realisiert wird: die Programmierung sogenannter Physik-Engines. Bei derartigen Zusammenschauen spielen physikalische Erwägungen, Näherungsverfahren oder Klassifikationen auch eine Rolle, aber nicht mehr eine tragende. Bemerkenswert ist allerdings die Konvergenz der Methodik zwischen den ernstesten Naturwissenschaften, die immer deutlicher auf Computermodele zurückgreifen, und der unterhaltenden Computerspieleindustrie, die immer ernstere

¹⁵Oder *framework* wie derlei gern genannt wird.

¹⁶Und interessanterweise in anderer Auflösung und mit größerem Ernst auch in Klimamodellen.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

mathematische Geschütze auffährt; so sehr, dass inzwischen Bücher mit dem Titel „*Game physics*“ [Ebe04] Standardwerke sind.

3.4.4. Sonstige natürliche Phänomene

Fehlt noch etwas in dieser Klassifikation? Es wurde bereits angedeutet, dass Partikelsysteme äußerst anpassungsfähige Varianten darstellen, natürliche Phänomene zu modellieren. Die Anpassungsfähigkeit ließ sich dabei über Phänomenklassen hinweg ausdehnen, so dass damit auch Übergänge zwischen Modellierungsregimes durchführbar waren. Dies gibt Anlass zur Frage, ob nicht grundsätzlich alle Phänomene aus derartigen Atom-Partikel-Modellen aufbaubar wären, unter Annahme unbegrenzter Ressourcen. Programmiertechnisch bedeutet diese Frage: Wie sähe die Schnittstelle der Klasse für ein solches Urpartikel aus? Welche Eigenschaften trüge das Urpartikel und auf welche Arten müsste es mit anderen Partikeln wechselwirken können? Für die bisher vorgestellten Phänomene bestehen wahrscheinlich gute Chancen, sie eines Tages bei ausreichender Rechenleistung vollständig aus Partikeln ableiten zu können - trotz der unvollständigen Parallelisierbarkeit von Partikelsystemen. Bis auf vereinzelte Ausnahmen¹⁷ handelte es sich dabei ausschließlich um Phänomene, die aus den Prinzipien der Newton'schen Mechanik ableitbar waren. Eine Ausnahme bildet die Verteilung von Licht in einer Szene: sie beruht zum Teil schon auf quantenmechanischen Ansätzen. Daneben bilden die lebenden Phänomene eine beachtenswerte Gruppe, auch wenn sie hier zunächst ausgeschlossen blieben. Und nicht minder alle Phänomene, die auf den Besonderheiten der menschlichen Wahrnehmung beruhen, d. h. die optischen Täuschungen, die eindeutig auch natürlich sind.

Über das Licht gibt es bereits umfängliche Arbeiten in der Computergraphik. Es gibt einfache lokale und globale Beleuchtungsmodelle, sowie Ansätze, die auf Strahlungsbilanzen basieren oder auf Photonenverfolgung. Die Beleuchtung virtueller Szenen ist so umfassend präsent, dass es nicht hilft, sie in dieser Arbeit mit den anderen natürlichen Phänomenen zusammenzufassen. Allerdings ist sie ein gutes Beispiel, um die Grenzen partikelbasierter Ansätze zu demonstrieren. Lichtbeugung, wie sie beispielsweise an sehr schmalen Spalten oder in farbig schillernden Benzinpfützen auftritt, ist nicht mit einem konsistenten Partikelmodell realisierbar. Die Beugung ist nicht an einen spezifischen Ort gebunden, sondern ein Ausdruck geometrischer Beziehungen, d. h. von Gangunterschieden zwischen einzelnen Wellenbündeln. In der Physik ist der Gegensatz von Lichtteilchen und Lichtwelle in der Abstraktion der Wellenfunktion Ψ aufgehoben. Für die Computergraphik werden bisher kaum quantenmechanische Methoden eingesetzt. Wesentlich praktikabler ist die direkte Beugungsmodellierung mit Wellenpaketen (z. B. [Sta99a]).

Auch zur Modellierung lebendiger Formen gibt es eine Vielzahl von Arbeiten. Über die Natürlichkeit derartiger Phänomene besteht kein Zweifel, dennoch blieben sie aus der vorgestellten Klassifikation ausgespart. Primitive Pflanzen wie Moose oder Flechten könnte man wohl noch unter den statischen, texturgenerierenden Phänomenen unterbringen. Auch prozedural erzeugte höhere Pflanzenmodelle gehörten zu den statischen

¹⁷Das waren die elektrische Entladung und ein Teil der Phasenübergänge.

3.4. Klassifikation der natürlichen Phänomene in der Computergraphik

Oberflächenbildnern (siehe z. B. [DL05]). In jüngerer Zeit erfreuen sich die dynamischen, d.h. elastischen Eigenschaften von Pflanzen ebenfalls wieder größerer Beliebtheit in der Modellierung (z. B. [HKW09]). Partikelbasierte Ansätze könnten sich dabei in Zukunft bewähren. Neben den elastischen Eigenschaften wäre insbesondere das Pflanzenwachstum geeignet für partikelbasierte Beschreibungen, denn dort üben lokale Wechselwirkungen den stärksten Einfluss aus.

Während Pflanzen gut als natürliche Phänomene mit mathematischen Methoden darstellbar sind, erweist sich dieser Zugang für die Charakteranimation als heikel, trotz der offensichtlichen Natürlichkeit. Vermutlich liegt es daran, dass eigenständige Bewegungen von Lebewesen sich nicht einfach auf mikroskopisch-lokale Bedingungen und Kausalketten zurückführen lassen. Immer spielen räumlich-ausgedehnte Verbindungen, wie z. B. Knochen oder quasi-autonomen, d. h. umgebungsabhängige Entscheidungen eine wesentliche Rolle. Auch partikelbasierte Methoden helfen folglich nicht weiter. So dominieren in der Animation nach wie vor die heuristischen Ansätze. Ein wahrscheinlich sehr zukunftssträchtiger Ansatz von Kry et al. [KRFC09] führt die natürliche Fortbewegung auf punktuelle Anregungen schwingungsfähiger Subsysteme zurück. Muskelkontraktionen erfolgen dabei nur impulsartig und rhythmisch, die Bewegung der Gliedmaßen zwischen den Impulsen folgt den physikalischen Gesetzen von harmonischen Oszillatoren. Diese sehr energiesparende Fortbewegungsmethode liegt vermutlich auch den natürlichen Bewegungen zu Grunde.

Schließlich fehlen noch diejenigen Phänomene, die nur in der Wahrnehmung des Betrachters erkennbar sind. Derlei als natürliche Phänomene zu bezeichnen erscheint zunächst erstaunlich. Wenn man sich aber in die Perspektive eines Modellierers versetzt, erscheinen die physiologischen oder psychophysischen Reaktionen des Betrachters auf bestimmte Situationen in virtuellen Welten durchaus natürlich, vorhersagbar und kalkulierbar. Konventionell fällt diese Herangehensweise nicht in den Bereich der Computergraphik oder der Naturwissenschaften, sondern in den der Gestaltung, der Werbung und der Öffentlichkeitskommunikation. Dennoch bieten sich an dieser Schnittstelle zwischen Computertechnik, physikalischer Modellierung und der Wahrnehmungspsychologie große Spielräume - so groß, dass sie den Umfang dieser Arbeit sprengen würden. Einige wenige Beispiele sollen dennoch andeuten, welche reichhaltigen Möglichkeiten hier ruhen. Das Stichwort für die Computergraphik ist hier : „wahrnehmungsbasiert¹⁸“, analog zu den bildbasierten Methoden, die in Kapitel 3.3.1 vorgestellt wurden. Die Grundidee besteht darin, die Rechenleistung an Stellen einer Szene zu maximieren, auf denen die größte Aufmerksamkeit eines Betrachters zu erwarten ist. Das Prinzip der Idee ist hinlänglich bekannt, jedoch wird es selten konsequent ausgenutzt. Einen der wenigen systematischen Ansätze schlagen Ramanarayanan et al. [RBF08] vor. Sie erzielen Einsparungen in der Polygonanzahl virtueller Szenen im Bereich von 20% und mehr ohne messbaren Wahrnehmungsunterschied, indem sie Ergebnisse psychophysikalischer Experimente in algorithmische Vorgaben umsetzen.

Eine indirektere Form der Wahrnehmungsorientierung findet breitere Verwendung in virtuellen Welten. Es betrifft die Übertreibung ausgewählter Aspekte einer physikali-

¹⁸In der Literatur als *perception based* zu finden.

3. Natürliche Phänomenmodellierung in der Computergraphik

schen Simulation zur Steigerung der Überzeugungskraft. Letztlich ist es nichts anderes als die analoge Übertragung von Erkenntnissen aus der wissenschaftlichen Visualisierung in die Modellierung natürlicher Phänomene. Ein einfaches Beispiel ist die Überhöhung topographischer Höhenfelder: Der Höheneindruck wird intensiviert, indem er geometrisch übertrieben wird. Genauso werden in vielen Computerspielen die mechanischen Wechselwirkungen von Starrkörpern überzeichnet. In virtuellen Autorennen beispielsweise treten oft extreme Karosserieelastizitäten oder Flugweiten auf, die die Stimmigkeit der virtuellen Welt verbessern. Ein anderes Beispiel ist die Markierung von virtuell-bedeutsamen Orten mit visuellen Effekten, wie zum Beispiel ein bläuliches Leuchten, das die Funktion eines Teleportationstores in einem Computerspiel suggeriert. Das Prinzip der unterbewussten Suggestion wird selten als natürliches Phänomen erkannt oder akzeptiert, denn offensichtlich handelt es sich bei nüchterner Betrachtung der Ergebnisse um unrealistische Modellierungen. Dahinter steht die Überzeugung, die menschliche Wahrnehmung als außerhalb der Natur stehend zu betrachten. Diese Überzeugung ist solange haltbar, wie Besuchern und Modellierern virtueller Welten das gleiche nüchterne Hintergrundverständnis zuerkannt wird. Denn die meisten dieser Suggestiv-Modellierungen büßen einen Teil ihrer Wirkung ein, wenn sie ins Bewusstsein dringen. Einige optische Suggestionen lassen sich jedoch auch mit bewusstester Betrachtung nicht leugnen. Ein besonders im Animationsbereich bedeutsames Beispiel ist das Phänomen des *uncanny valley*. Dieses Tal wurde erstmals 1970 von Mashiho Mori beschrieben und auf Japanisch als „buki-mi no tani“ [Mor70], deutsch das unheimliche Tal, bezeichnet. Dabei werden Animationen menschlicher Charaktere ab einem bestimmten photographischen Realitätsgrad plötzlich als außerordentlich unangenehm und unheimlich empfunden. Manche frühen Animationsfilme sind in diese Falle getappt. Inzwischen ist es hinlänglich bekannt, dass die Wahrnehmungsnatur des unkritischen Zuschauers bestimmter virtueller Kennzeichen und bewusster Verfälschungen in der virtuellen Welt bedarf, um sich wohl zu fühlen. Für die Modellierung natürlicher Phänomene im engeren Sinne dieser Arbeit und für die virtuelle Schreibtischrealität ist der Unrealismus jedoch noch groß genug. Das Streben nach Realismus wird hier also noch auf einige Zeit eine brauchbare Richtung vorgeben.

3.5. Schlussfolgerung

Aus der Klassifikation lässt sich absehen, dass in Zukunft die meisten Neuerungen im Bereich der zusammengesetzten Phänomene zu erwarten sind, und dort zumindest unter Beteiligung partikelbasierter Methoden.

Für die vorliegende Arbeit ist nun das nötige Material zusammengetragen, um das Phänomen Schnee fundiert in die virtuellen Welten der Computergraphik zu integrieren.

4. Schnee in der Natur

Um ein realistisches Abbild des Phänomens Schnee für virtuelle Welten zu erzeugen, hilft ein Blick in die Natur. Woher kommt natürlicher Schnee? Wie tritt er in die menschliche Wahrnehmung? In welcher Form bleibt er auf dem Boden liegen? Wie verändert sich der Schnee am Boden und wie verschwindet er wieder? Diese Fragen werden im Folgenden überblicksartig diskutiert. Daraus ergibt sich eine Sammlung von Schneeeaspekten, die sich für die computergraphische Modellierung eignen.

Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Schnee, der sich von Jahr zu Jahr im Winter fällt und im Sommer wieder vollständig abtaut.

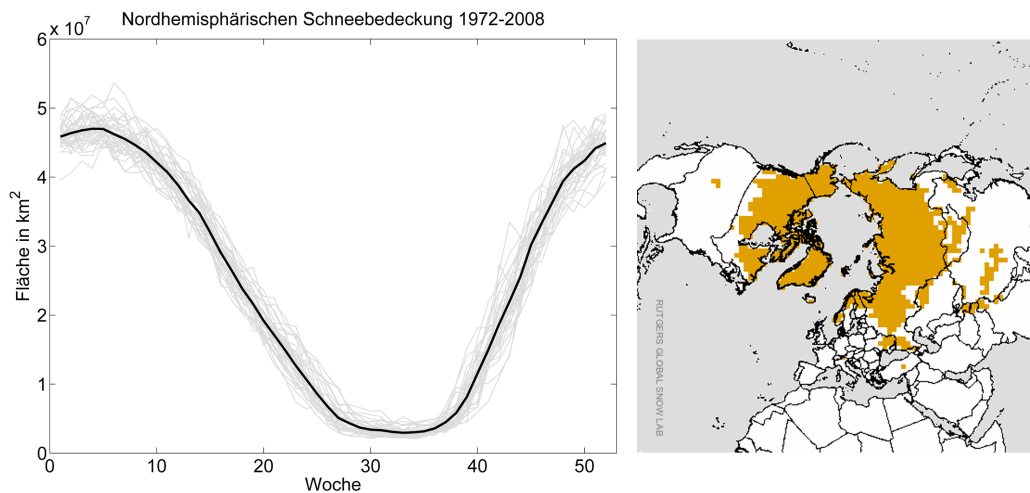


Abbildung 4.1.: Links: Schneebedeckung der nördlichen Hemisphäre in den Jahren 1972-2008. Die dicke schwarze Linie ist der wöchentliche Durchschnitt gemittelt über alle Jahre. Die Daten stammen vor allem aus satellitengestützten Schätzungen. Rechts: Ein Beispiel für die Eingangsdaten vom 3. November 2009. Quelle: [RU09]

Abbildung 4.1 zeigt den jährlichen Verlauf der schneebedeckten Fläche auf der Nordhalbkugel. Mit einer Schwankung zwischen 3 und maximal 45 Mio. km² betrifft der hier betrachtete Schnee einen maßgeblichen Anteil der nördlichen Landoberflächen. Daneben zeigt sich auch, dass die Schneebedeckung trotz der weiten jahreszeitlichen Schwingung nur geringe Varianz von Jahr zu Jahr aufweist.

4.1. Entstehung

Schnee ist eine besondere Form von witterungsbedingtem Niederschlag¹. Das Grundprinzip seiner Entstehung teilt er mit den anderen Niederschlagsformen: in der Luft gelöster Wasserdampf fällt aus. Das geschieht überall dort, wo sich die Wasserdampfkapazität c der Luft absenkt. Die Wasserdampfkapazität c hängt exponentiell von der Temperatur ab, d.h. sie fällt stark ab bei sinkender Temperatur. Ein Kilogramm Luft kann bei 30°C 27,2 g Wasserdampf enthalten, bei -5°C nur noch 3,0 g [Häc93]. So ist die Voraussetzung für die Niederschlagsbildung die Abkühlung einer Luftmasse, und zwar so stark, dass einerseits die kinetische Kondensationsbarriere überwunden wird und andererseits der Niederschlag nicht wieder verdunstet auf dem Weg zum Erdboden. Die Abkühlung einer Luftmasse kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Der meteorologisch typische Fall ist die Hebung, die adiabatische Temperaturabsenkung nach sich zieht. Dies tritt entweder im Rahmen von Fronten und Luftmassenmischungen auf, durch sonnenbedingte Erdoberflächenerwärmung oder durch sog. orographische Hebung beim Überströmen eines Gebirgszuges.

4.2. Niederschlag

Wenn diese großskaligen Bedingungen für die Niederschlagsbildung erfüllt sind, dann müssen außerdem die mikroskopischen Bedingungen einer Kondensation günstig sein. Interessanterweise ist dabei der Weg des Wassers von der gelösten Dampfform zum kondensierten Eiskristall energetisch wesentlich günstiger, als der Weg von der Dampfform zum Wassertröpfchen. Voraussetzung ist jeweils die Anwesenheit von Kondensationskeimen, d.h. winziger Inhomogenitäten in der Luft, wie z.B. Staubkörnchen. Wenn auf diese Weise einmal Eiskristalle entstanden sind, fungieren die Kristalle selbst als Kondensationskeime, die die weitere Kondensation erleichtern. Wenn zuerst Wassertröpfchen entstehen statt Eiskristalle, dann verläuft die Kondensation deutlich langsamer. Darin liegt ein weiterer Grund für die niederschlagsbegünstigenden Eigenschaften von Eis. Wenn spürbare Niederschlagsmengen auftreten, kann man daher davon ausgehen, dass die Initialkondensation als Schnee bzw. Eiskristall erfolgte. Einzig der Nieselregen entsteht ohne Beteiligung einer Eisphase durch Koaleszenz kondensierter Wassertröpfchen.

Wenn die Kondensation einmal eingesetzt hat, beginnen die Eiskristalle zu wachsen. Das Wachstum vollzieht sich gemäß der Kristallstruktur vorrangig senkrecht zu einer sechszähligen Symmetrieachse. Dabei entsteht eine enorme Vielfalt an Strukturen. In

¹Trotz der Gefahr, die konventionelle Glaubwürdigkeit dieser Arbeit zu beschädigen, erscheint bei der Frage nach dem Sein des Schnees ein mythologischer Exkurs unausweichlich. In alten Zeiten und für Kinder galt Schnee als Zeichen von Frau Holle, die ihre Betten ausschüttelt. Naiver Aberglaube einerseits, doch andererseits Symbolik einer stimmigen Tiefe, wie sie heute unmöglich scheint. Denn Frau Holle ist wohl hervorgegangen aus der altnordischen Göttin Hel, die im Deutschen noch im Wort „Hölle“ und „verhehlen“ zu entdecken ist. Hel hauste wohl bei Niflheim, dem Ort des Nebels und des Nichts. Wenn Schnee fällt, so wird die Welt darunter verborgen. Alle Farben und Formen verschwinden in strukturlosem Weiß: Sie werden „verhehlt“ und erst im Sommer erwachen sie zu neuem Leben.

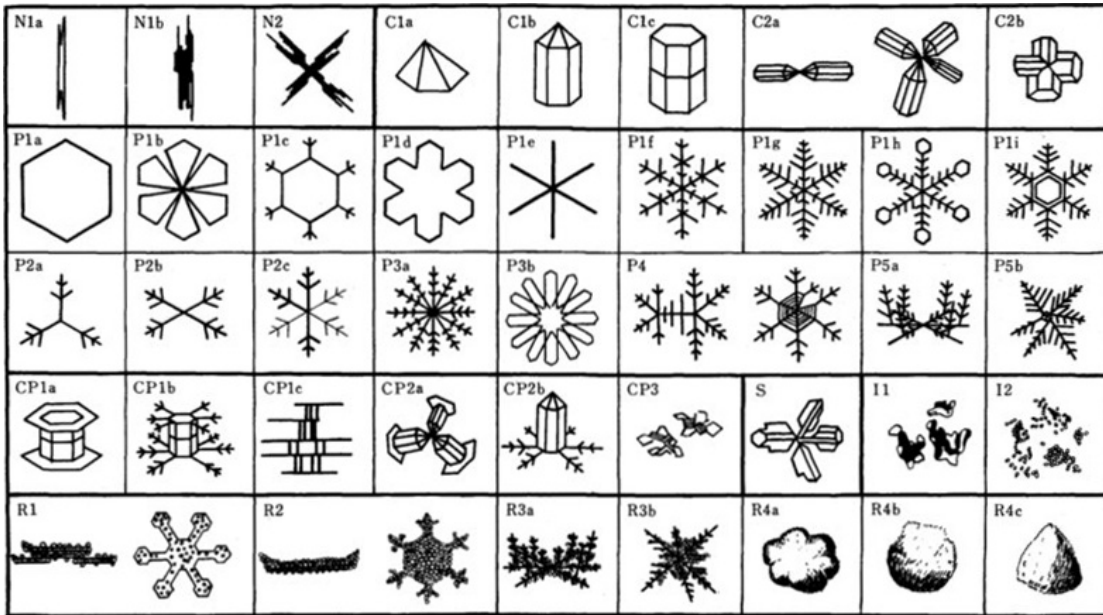


Abbildung 4.2.: Schneeflockenformen nach [Nak54].

Abbildung 4.2 ist eine Auswahl aus der klassischen Schneeflockenklassifikation von Uki-chiro Nakaya [Nak54] zu sehen. In der Natur sind meistens Zusammenballungen bestehend aus mehreren Einkristallen zu beobachten.

Die Vielfalt kommt durch unterschiedliche Druck- und Temperaturbedingungen bei der Schneeflockenentstehung zustande. Beim Weg der Schneeflocken zur Erde kommt es zu erneuten Umwandlungen: Rekristallisationen, Zusammenballung mehrerer Einkristalle und zu Tauprozessen. Wenn die Temperatur auf dem Weg nach unten nicht zu stark ansteigt, erreichen die Eiskristalle den Erdboden. Als grobe Faustregel gilt, dass die Nullgradgrenze der Atmosphäre nicht weiter als 500 m über dem Erdboden liegen darf (d.h. bei üblichen Temperaturgradienten feuchter Luft eine Lufttemperatur am Boden kälter als $+2$ bis $+4$ °C). Offensichtlich gilt das in gemäßigten Breiten vor allem in den Wintermonaten.

Der Transport der Schneeflocken ist dominiert von der Schwerkraft. Die Windbewegung der Luft ist der zweitwichtigste Faktor. Außerdem gibt es noch die Luftreibung auf kleinster Skala mit lokal turbulenter Wechselwirkung zwischen den Schneeflocken und der Luft. Versuche zur Vermessung der mittelwertfreien Horizontalbewegung der Schneeflocken ergaben bei großer Messungenauigkeit² in etwa normalverteilte Werte, so dass auf eine eingehendere Untersuchung verzichtet wurde. Darüber hinaus bleibt es fraglich, ob mehr Forschung an dieser Stelle tatsächlich maßgebliche Aufschlüsse lieferte. Festzuhalten bleibt, dass die Schneeflocken im Normalfall nicht auf geraden Linien, sondern

²Die Messapparatur bestand aus einer vertikal ausgerichteten Kamera, die Auswertung erfolgte mittels Tracking per OpenCV ohne perspektivische Korrektur. Die offensichtlichen Messungenauigkeiten in diesem Verfahren sind ohne sehr viel mehr Aufwand vermutlich nicht zu beheben.

auf höchst irregulären und turbulent variierenden Pfaden zur Erde gelangen.

4.3. Akkumulation

Sobald die Schneeflocken den Boden erreicht haben, stellt sich die Frage nach den mikrometeorologischen Bedingungen, die für die Ausbildung einer Schneedecke notwendig sind. Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten. Das zeigt sich zum Beispiel darin, wie vorsichtig sich mitteleuropäische Wettervorhersagedienste zu liegenbleibendem Schnee äußern. Zehntel Celsiusgrade und minimale Schwankungen in der Niederschlagsintensität können hier entscheidend sein.

Wenn die Schneeakkumulation gelingt kann sich eine große Vielfalt von Erscheinungsformen auf visuellem Maßstab entwickeln. Abbildung 4.3 zeigt verschiedene Zeitschritte einer realen Beschneigung. Dabei sind mindestens drei Aspekte bemerkenswert:

1. die Geometrie des Untergrundes bildet sich geglättet in der darrüberliegenden Schneeoberfläche ab,
2. mit zunehmender Schneehöhe verschmelzen zunächst unverbundene Untergrundpartien und
3. der Untergrund reagiert unter der Auflast des Schnees.

Diese Aspekte zeigen sich auch in anderen Beschneigungssituationen. Deutlich ist in Abb. 4.4 zu erkennen, dass schmale Lücken oder Kanten im Untergrund von der Schneedecke überbrückt und geglättet werden können. Daneben wird noch eine weitere wesentliche Eigenschaft sichtbar: Am Rande zusammenhängender Schneepakete entsteht ein glatt ansteigendes Randprofil, nur schwach abhängig von den exakten mikrometeorologischen und geometrischen Verhältnissen. Weitere Untersuchungen zeigen, dass das Randprofil auch unabhängig von der Gesamtschneehöhe immer wieder in ähnlicher Form erscheint.

Für extremere Bedingungen wie hohe Windgeschwindigkeiten, Bodentemperaturen deutlich über 0°C oder für außergewöhnlich große Schneeflocken kann das Randprofil aber überdeckt sein. Abbildung 4.5 zeigt Bilder dieser drei Verhältnisse.

In der Natur lassen sich noch unzählige weitere hochkomplexe und immer wieder einzigartige Schneeformen entdecken. Die Formenvielfalt der einzelnen Schneeflocken findet sich auch bei der Schneeakkumulation wieder. Eine Klassifikation dieser Formen steht bisher noch aus, wohl auch, weil sie für das vielbeforschte Gebiet der Lawinenkunde von untergeordnetem Interesse sind. Allerdings ist man auch dort weit davon entfernt, ein erschöpfendes und vollständig systematisiertes Verständnis entwickelt zu haben. Die Arbeiten befassen sich vor allem mit der Sammlung der internen Materialeigenschaften (z.B. [Mel74, CAA⁺90]), mit konzeptionellen Modellen mit begrenzter prognostischer Aussagekraft (z.B. [Sto05]) oder mit hybriden empirischen Modellen zur lokalen und regionalen Lawinenwarnung (z.B. [LBB⁺99]).

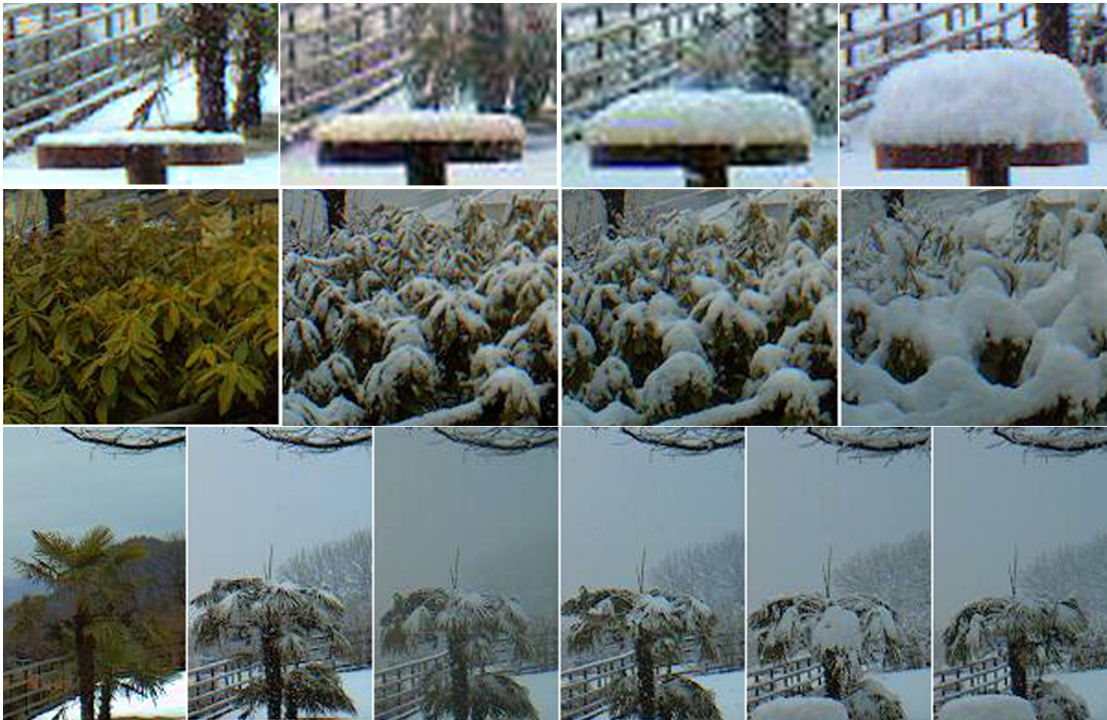


Abbildung 4.3.: Eine Schneedecke bildet sich. Die Aufnahmen entstanden zwischen 9:00 Uhr und 16:00 Uhr am 16. Januar 2008 in Locarno. Quelle: Webcam auf www.webticino.ch

4.4. Metamorphose

Sobald der Schnee auf dem Boden liegt, unterliegt er weiteren Metamorphosen oder Umlagerungen. Das ist seiner komplexen Struktur begründet. Frisch gefallener Schnee besteht zum größten Teil aus Luft, aus Eiskristallen und einem kleinen Wasseranteil. Der erste wesentliche Prozesse am Boden ist die schwerkraftbedingte Kompaktifizierung. Dabei steigt die Dichte des Neuschnees von $50\text{--}70\text{ kg/m}^3$ bis auf $700\text{--}800\text{ kg/m}^3$ (Nassschnee oder Firn) [Pat94] an. In der Hauptsache wird bei der Kompaktifizierung die Luft aus dem Schnee getrieben. Der Prozess ist begleitet von lokalen Umkristallisationen. Konvexe Eiskristallregionen weisen eine höhere Oberflächenspannung auf und damit höheren Dampfdruck als konvexe Einbuchtungen. Das führt dazu, dass Material von den Schneeflockenspitzen zu den Schneeflockenzentren diffundiert. Abbildung 4.6 zeigt eine Skizze und eine CT-Aufnahme dieses Prozesses.

Dazu kommen in gemäßigten Breiten noch wiederholte Tau- und Wiedergefrierereignisse, die die Kompaktifizierung beschleunigen. Ob die Schneemasse dabei zu- oder abnimmt, hängt interessanterweise keineswegs nur von der Lufttemperatur ab. Die Überlegungen in [Kuh87] zeigen, dass die Schneeschmelze stark abhängt von der Sonnen- und Infrarotstrahlung sowie der Luftfeuchtigkeit. In extremen Fällen kann die Schneemasse

4. Schnee in der Natur

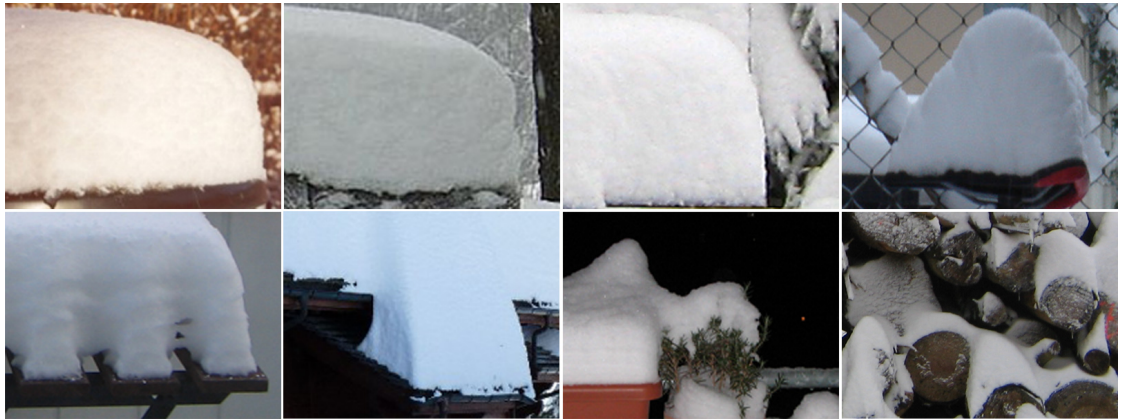


Abbildung 4.4.: Typische Randprofile der Schneebedeckung und Untergrundglättungen



Abbildung 4.5.: Schneeablagerungsformen bei Bodentemperaturen deutlich über 0°C (links), bei sehr großen Schneeflocken (Mitte) und bei hohen Windgeschwindigkeiten (rechts, man beachte den Schneehöhenunterschied links und rechts von der Lokomotive.)

schon ab -35°C tauen bzw. bis $+10^{\circ}\text{C}$ stabil bleiben.

4.5. Computergraphisch modellierbare Aspekte

In dieser Arbeit ist das Ziel die computergraphische Modellierung von Schnee. Wie die voranstehenden Überlegungen gezeigt haben, umfasst der Schnee eine große Vielfalt visueller Erscheinungsformen. Virtueller wird man Schnee insgesamt kaum als ein Phänomen modellieren können. Stattdessen sind aber einzelne Aspekte des Schnees in spezielle Modelle zusammenfassbar. Wie in Kapitel 3.4 entwickelt, folgt nun eine klassifizierte Aufschlüsselung der computergraphisch modellierbaren Schneeaspekte. Die aufgeführten Aspekte beschränken sich auf die oben eingeführte virtuelle Schreibtischrealität. Die Aufschlüsselung will als Richtwert verstanden sein, und nicht als erschöpfende Vollerfüllung. Denn eines wird sich auch zukünftig der vorgreifenden begrifflichen Fixierung entziehen: der Grad an Abstraktion, der vom Benutzer noch als wirklichkeitsverwandt toleriert wird. Derlei ist eine Frage der Konvention und der Gewöhnung und nicht Gegenstand

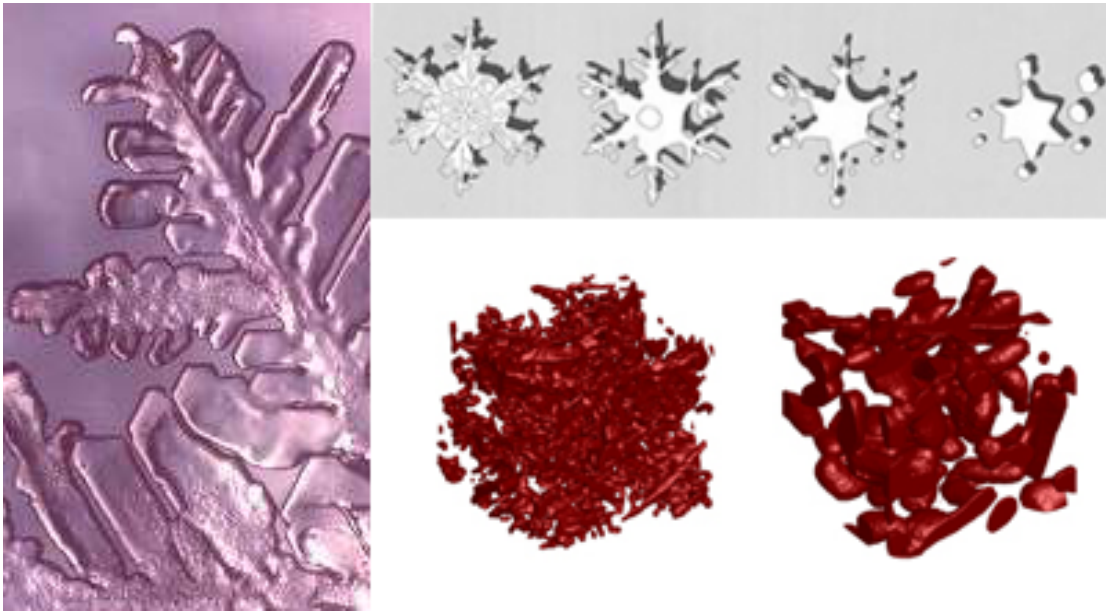


Abbildung 4.6.: Links: Detail einer Schneeflocke, Bildsenkrechte ca. 2 mm. Rechts: Schneekompaktifizierung. Oben: Skizze der diffusiven lokalen Schneeflockenumkristallisation. Unten: CT-Aufnahme eines realen Schneesegmentes direkt nach dem Schneefall und nach 23 Tagen bei -3°C . Quelle: Schweizer Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

wissenschaftlich-technischer Arbeit. Die Frage verweist auf diejenigen Erkenntnisregionen, die, wie in Kapitel 3.2 diskutiert, durch die Struktur des Unbewussten konstituiert sind. Im Folgenden wird also unterschieden zwischen statischen, d.h. vorberechenbaren Aspekten, und dynamischen, d.h. animierbaren Aspekten des Schnees.

Statische Aspekte des Schnees

Die augenfälligste Eigenschaft des Schnees sind seine **optischen Eigenschaften**. Auf Photographien sticht er mit flächigem Weiß ins Auge, bei spekularer Beleuchtung außerdem durch seine spiegelnde Lichtreflexion und -brechung. Das Spektrum der Farberscheinungen ist weit, und es hängt vom Alter des Schnees ab, von seiner Vorgeschichte, d. h. ob beispielsweise zuletzt Schmelzvorgänge, Neuschnee oder Reifbildung auftraten, und von der globalen Beleuchtung, d.h. in der Natur vom Wetter. Für die Modellierung in virtuellen Welten erweist sich als schwierigste Aufgabe, das weite lichtdynamische Spektrum (engl. „high dynamic range“) realistisch abzubilden³. Abbildung 4.7 zeigt zwei extremere Beispiele für das Spektrum des Aussehens von Schnee. Im Gegensatz zu den anderen computergraphisch relevanten Aspekten gibt es für die optischen Eigenschaf-

³Mündliche Mitteilung von Stefan Seipel von der Universität Uppsala im April 2009 auf der *Eurographics* in München sowie [Liu10].

4. Schnee in der Natur



Abbildung 4.7.: Links: Sogenannter Büßerschnee, der durch sonnenbedingte Verdunstung des Schnees bei Lufttemperaturen unter null Grad entstand. Rechts: Windbedingte Schneedrift im Gegenlicht. Man beachte die Ausreizung des Helligkeitsspektrums der Aufnahme.

ten von Schnee eine ganze Reihe von direkt verwertbaren physikalischen Vorarbeiten. Einen Überblick liefern [War82] und [KZ04]. Bemerkenswerterweise bezieht sich eine der grundlegendsten computergraphischen Arbeiten zur Beleuchtung rauer Oberflächen (das Blinn-Beleuchtungsmodell [Bli77, TS67] auf eine frühe Arbeit zur Vermessung optischer Schneeeigenschaften [MM52].

Wenn der Schnee aus größerer Entfernung betrachtet wird, dann erscheint er als ein spezielle Form der **Landschaftstexturierung** S2. Dabei ist die spezifische Aufgabe, eine geeignete Verteilung der Flächen mit Schneetextur zu finden, ohne geometrische Veränderung.

Neben den Oberflächeneigenschaften und der Landschaftstexturierung ist die **Form der Schneeoberflächen** ein wesentlicher modellierbarer Aspekt. Wie bereits in Kapitel 4.3 angedeutet und in Abbildung 4.4 dargestellt, zeigt die Form der Schneeoberfläche folgende Eigenschaften:

- Je größer eine Fläche, desto höher liegt der Schnee darauf bis zu einer niederschlagsmengenabhängigen Obergrenze (siehe Abb. 4.4 oben rechts),
- auch vertikal verdeckte Flächen werden von Schneeflocken erreicht (Abb. 4.4 unten rechts),
- Schnee kann freihängende Brücken ausbilden (Abb. 4.3 Mitte und 4.4 unten),
- an den Rändern zusammenhängender Schneepakete bildet sich abgerundetes Randprofil (Abb. 4.4) und
- Schneeoberflächen glätten die Geometrie des Untergrundes, sofern kein extremer Windtransport oder starke Oberflächenmetamorphose auftritt.

Diese Arbeit wird eine fotorealistische Lösung für den Aspekt der Schneeoberflächenform entwickeln, sowie eine Teillösung für die Visualisierung der optischen Schneeoberflächeneigenschaften.

Dynamische Aspekte des Schnees

Grundsätzliche ließen sich sowohl die Form als auch die Lichteigenschaften des Schnees animieren, d. h. dynamisch modellieren. Gute statische Modell, die entweder prozedural oder differentiell aufgebaut sind, umfassen diese Möglichkeit bereits.

Eine Zwischenstellung nimmt die **mechanische Reaktion des Untergrunds** ein, wie sie in Abbildung 4.3 in der Mitte dargestellt ist. Für eine definierte Menge an Schneeeauflage gibt der Untergrund nach und stellt sich auf ein stationäres mechanisches Gleichgewicht ein. Zu Animationszwecken empfiehlt sich jedoch eine dynamische Eigenschaft der mechanischen Reaktion: die Veränderung der Geometrie im Verlauf der Neuschneeeauflage. Sie kann auch zu lokalen Schneeuumlagerungen führen.

Der Aspekt der **Schneeuumlagerung** führt zu einem Verhalten, das dem eines Schüttgutes ähnelt, allerdings ist es bei Schnee meist mit einer Verdichtung oder lokalen Verklumpung verbunden. Auch beim windbedingten Schneetransport erscheint dieser Aspekt. Der modellierbare Aspekt kann als **induzierte Kompaktifizierung** bezeichnet werden, dabei ist auch die Möglichkeit der Verdichtung durch externe Faktoren berücksichtigt, wie zum Beispiel durch Fußgänger. Der rechte Teil von Abbildung 4.8 zeigt diese Möglichkeit in der Natur.



Abbildung 4.8.: Interaktive Schneeaspekte Schneefall und induzierte Kompaktifizierung.

Ein offensichtlicherer Aspekt des Schnees ist der **Schneefall**. Er ist einer der wenigen Aspekte, der sich bildbasiert realisieren lässt. So ist dann auch Windbewegung relativ einfach zu integrieren. Trotz seiner einfachen Modellierbarkeit ist der Schneefall visuell unter Umständen sehr dominant (Abb. 4.8 links).

Schließlich erzeugt **tauender Schnee** eine Reihe von visuell verwertbaren Aspekten. Dazu gehört z. B. die Musterbildung, beim Zusammenbruch einer Schneedecke. Wie

4. Schnee in der Natur

bei den meisten Phasenübergängen zeigen die Muster sehr irreguläre und vor allem skalenfreie Formen (Abb. 4.5 und 4.9 jeweils links).



Abbildung 4.9.: Tauender Schnee. Quellen: wetteronline.de und wetter-foto.de

Visuell besonders reichhaltig kann tauender Schnee an Kanten nahe dem Gefrierpunkt sein, aufgrund der Vielfalt möglicher **Metamorphosen**. Dabei entsteht neben der schrumpfenden Schneedecke sowohl fließendes Wasser als auch Eiszapfen (Abb. 4.9 rechts). Die Modellierung erfordert hier allerdings die Kombination verschiedener Untermodelle, d.h. Fluid-, Eiszapfen- und Schneeschmelzsimulation in einem.

5. Vorarbeiten zur computergraphischen Schneemodellierung

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt liegen fünfzehn unabhängige computergraphische Publikationen zur Schneemodellierung vor. Sie alle dienten als Vorarbeiten zu den zwei Publikationen über Schnee, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden und die in späteren Kapiteln ausführlich eingeführt und dargestellt werden. Die Vorarbeiten betreffen jeweils einen oder mehrere der Schneeeaspekte, die in Kapitel 4.5 erörtert wurden.

5.1. Modellierung statischer Aspekte

5.1.1. Optische Schneeeigenschaften

Keine computergraphische Modellierung natürlicher Phänomene kommt gänzlich ohne Visualisierung aus. So zeigt auch jede computergraphische Schneemodellierung wenigstens einzelne Bilder mit virtuellem Schnee. So gibt es auch für jede Publikation eine Entscheidung über die Art der Wiedergabe der optischen Schneeeigenschaften. In den meisten Fällen wird der Schnee schlicht weiß dargestellt, während gründlichere Überlegungen fehlen. Dennoch gibt es Arbeiten, in denen detaillierte Angaben gemacht werden. In [NIDN97] wird ein Verfahren herangezogen, das ursprünglich zur Darstellung von Wolken entwickelt wurde. Die Besonderheit bei Wolken ist die Vielfachstreuung von Lichtstrahlen in ihrem Inneren. Das gleiche Phänomen kann man auch bei Schnee beobachten. Nishita et al. [NIDN97] entwickelten auf dieser Grundlage einen voxelbasierten Algorithmus zum Rendern von Schneeoberflächen. Dabei wurden wie beim Raytracing explizite Lichtstrahlen berechnet, wobei sich die Lichtstrahlen einerseits aus Reflexionen an zufällig verteilten (Eis-)Prismen im Inneren des Schnees zusammensetzten und andererseits aus der Überlagerung von Umgebungslicht und der Reflexion am beschneiten Objekt (das je nach Schneetiefe abgeschwächt wurde). Ein Ergebnis dieser aufwendigen Methode ist in Abb. 5.1 zu sehen.

Muraoka et al. [MC00] erzeugen aus einem Voxelgitter eine geglättete Oberfläche, die sie mit einer Textur zur Glanzlichterzeugung überziehen. Daneben verwenden sie fraktales Rauschen, um die kleinskaligen Irregularitäten der Schneeoberflächengeometrie zu simulieren. Die genaue Vorgehensweise liegt leider nur auf Japanisch vor.

Eine unveröffentlichte Studentenarbeit [Chr06] bemüht sich dagegen, Schnee auf Grundlage von physikalischen Messwerten und theoretischen Modellen aufzubauen. Das resultierende Raytracing wird mit einer Monte-Carlo-Methode beschleunigt (siehe Abb. 5.1).



Abbildung 5.1.: Gerenderte Schneeoberflächen aus [NIDN97], [MC00], [Chr06] und [OS04].

Der einzige echtzeitfähige Ansatz, der versucht, die fraktale Struktur von Schneeoberflächen realistisch abzubilden, findet sich in [OS04] und verbessert in [Dud05]. Spekulare Reflexion und Vielfachstreuung sind hier mittels gestaffelten Verrauschens der Oberflächennormalen approximiert. Der spekulare Beleuchtungsanteil wird stärker verrauscht als der diffuse (siehe Abb. 5.1).

5.1.2. Geometrische Form der Schneeoberflächen

Fast alle Arbeiten, die sich mit computergraphischer Schneemodellierung beschäftigen, entwickeln Vorschläge zur Erzeugung der typischen geometrischen Form von Neuschnee. Die früheste Arbeit zu diesem Thema von Nishita et al. [NIDN97] erzeugt die Schneeform halbmanuell. Der Benutzer wählt per Maus die Position der Schneekörperzentren aus. Die Zentren dienen als Mittelpunkt sogenannter Metaballs, aus denen die Schneeoberfläche schließlich als implizite Fläche bestimmt wird. Auf diese Weise wird der glättende Charakter des Schnees grundsätzlich angenähert, genauso können auch Überhänge und Schneebrücken dargestellt werden.

Muraoka et al. [MC00] verfolgen einen Ansatz, der wie die Metaballs auf einer Raumaufteilung in Voxel basiert. Allerdings simulieren sie die Schneeakkumulation explizit mittels einer halbphysikalischen Näherung. Sie definieren virtuelle Schneeflockenverbünde, die vom Himmel fallen und die sich mit physikalisch motivierten Wahrscheinlichkeiten am Untergrund oder an bereits liegendem Schnee anlagern können. Zur Darstellung wird aus den schneegefüllten Voxeln eine geglättete, polygonale Oberfläche gewonnen. Eine virtuelle Temperatur bestimmt die Form der Schneeränder von sehr gerade wie bei Sand bis hin zu stark überhängenden, wolkenartigen Formen. Da die Voxel und die virtuellen Schneeflocken deutlich größer als reale Schneeflocken sind, bleibt der visuelle Realismus auf kleine Szenen mit moderater Komplexität beschränkt (siehe auch Abb. 5.1).

Die bekannteste Arbeit zur virtuellen Schneeformerzeugung [Fea00a, Fea00b] zeichnet sich durch barock-hypnotische Detailbegeisterung aus. Entsprechend sträubt sich der vorgeschlagene Algorithmus gegen bündige Zusammenfassung. Sein Ausgangspunkt ist das zu beschneide 3D-Modell, auf dessen himmelwärts weisenden Flächen sogenannte Startplätze verteilt werden. Wieder sorgen virtuelle Schneeflockenverbünde für die Schneeverteilung, bei Fearing allerdings werden sie von den Startplätzen nach oben geschossen, „for the need of control“ und vermutlich unter anderem auch, um eine umfangreiche Prioritätsschlange zu begründen. Im Himmel wird gesammelt und abgerechnet,

das Ergebnis kommt zurück auf die Erde: je sichtbarer der Himmel, desto höher der Schneertrag. So wird lokal eine vorläufige Schneehöhe definiert, die durch neigungsabhängige Umverteilung nach unten transportiert und schließlich durch implizite Funktionen geglättet wird. Der Algorithmus erfordert diverse Parameterjustierung. Das Endergebnis zeugt von redlicher Bemühung, die starke Abhängigkeit von der Triangulierung des Untergrundmodells erschwert jedoch eine allgemeinere Anwendbarkeit. Feldman et al. [FO02] skizzieren eine Möglichkeit, wie sich dieser Algorithmus (und auch jeder andere, der die Schneehöhe als Höhenfeld modelliert) auch zur Darstellung windbedingter Schneeformen erweitern lässt.

Einfachere Schneehöhenbeschreibungen mit Höhenfeldern [HAH02] ermöglichen auch echtzeitfähige¹ Schneeerzeugung, allerdings unter erheblichen Detaileinbußen.

Eine NVIDIA-Implementierung [Dud05] des Algorithmus von Ohlsson und Seipel [OS04] modelliert die Schneehöhe als reines Grundmodell-Offset, rudimentär ist auch die vertikale Verdeckung enthalten.

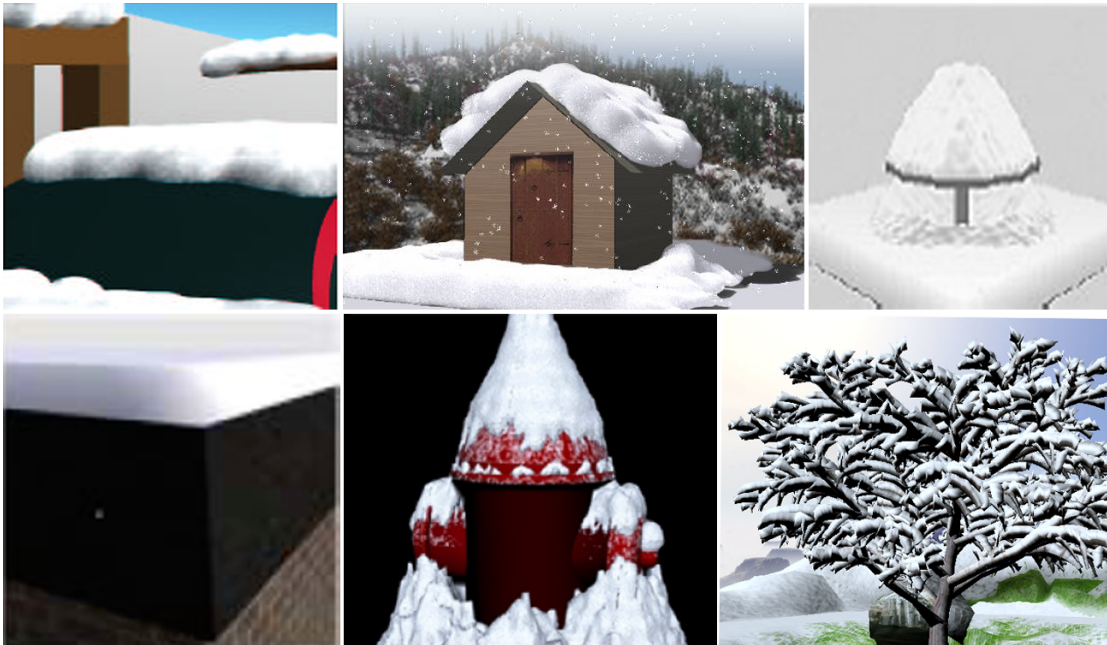


Abbildung 5.2.: Virtuelle Schneeformen. Oben: [NIDN97], [MC00] und [Tok06]. Unten: [HAH02], [Fea00a] und [Dud05].

Auch Moeslund et al. [MMAL05, AL04] berühren die Thematik der Schneeform, allerdings nur im Zusammenhang mit Winddrift und ohne grundsätzliche Neuerung im Vergleich zu [Fea00a]. Ähnliches gilt auch für die echtzeitfähigen Ansätze in [WWXP06] und [SEN06].

Tokoi [Tok06] führt erstmals das Prinzip der Tiefentextur in die Schneeformmodellie-

¹Für die Schneeakkumulation hat dieser Begriff offensichtlich nur mit der echten Zeit eines Modellierers am Computer zu tun und nichts mit der der Schneedeckenentstehung in der Natur.

5. Vorarbeiten zur computergraphischen Schneemodellierung

zung ein. Sein Vorschlag folgt einer Methode zur Erzeugung weicher Schatten. Aus leicht varierten Draufsichten wird schichtweise der Tiefenpuffer ausgelesen. Die akkumulierte Sichtbarkeit wird dann pixelweise in Schneehöhe umgerechnet. Die Verminderung der Schneehöhe am Rand von Schneepaketen wird durch Stabilitätstest wie in [Fea00a] realisiert. Wenn die Schneesegmente zuvor per Hand markiert sind, läuft das Verfahren mit mehreren Frames pro Sekunde.

5.1.3. Schnee als makroskopische Landschaftstextur

Bei Landschaftsansichten aus größerer Entfernung ($>100\text{m}$) spielt die detaillierte Beschaffenheit einer Schneeoberfläche keine Rolle mehr. Stattdessen bedarf es nur der Definition der Orte, an denen überhaupt Schnee liegt, und dort genügt eine opake weiße Textur zur Schneedarstellung. Premože et al. [PTS99] ziehen eine Kombination aus Höhendaten und Luftaufnahmen heran, um die Orte der Schneebedeckung (und anderer bergtypischer Merkmale) zu bestimmen. Foldes et al. [FB07] schlagen eine ähnlich Technik vor, sie operieren aber direkt auf 3D-Modellen. Sie bestimmen die relative Sichtbarkeit der Himmelshemisphäre, um dann mittels der genauen Bahn der Sonne am Himmel festzustellen, ob ein Ort schneebedeckt ist oder nicht. Prinzipiell wäre diese Herangehensweise auch auf kleinere Skalen anwendbar, dann wäre allerdings die Berücksichtigung der dreidimensionalen Schneeform notwendig.

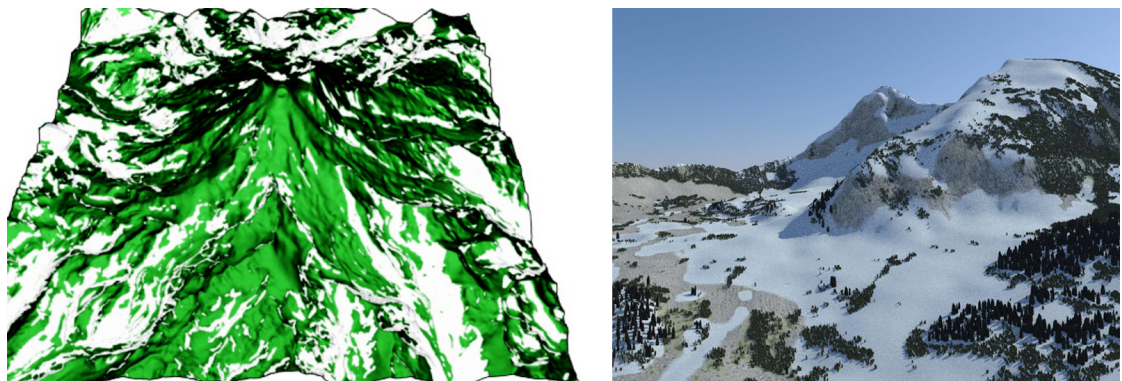


Abbildung 5.3.: Virtuelle Fernansichten beschneiter Landschaften aus [PTS99] und [FB07].

5.2. Modellierung dynamischer Aspekte

5.2.1. Schneefall

Die visuelle Simulation von Schneefall stellt im Vergleich zu den anderen Schneeaspekten eine sehr einfache Aufgabe, da das punkthafte Aussehen von Schneeflocken der vertexweisen Verarbeitung in der Computergraphik entgegenkommt. Muraoka et al. [MC00]

verwenden eine 3D-Textur, in die sie eine vorgefertigte Schneeflocke aus Polygonkombinationen eintragen. Die Polygone werden auf Voxel verteilt und in Opazitäten umgerechnet. Es fehlt die Umrechnung in dynamische Flockenbewegung, sie wäre aber leicht per Verschiebung der 3D-Textur realisierbar (siehe Abb. 5.1). Mit den virtuellen Schneeflocken zur Schneeakkumulation hat die 3D-Textur aber nichts gemein.

Langer et al. [LZK⁺04] schlagen ein bildbasiertes Verfahren vor. Eine kleine Anzahl explizit simulierter Schneeflocken wird mit Hilfe spektraler Methoden auf Bildebene verdichtet und dargestellt.



Abbildung 5.4.: Virtueller Schneefall aus [AL04] und [LZK⁺04]

Die bislang realistischsten Ergebnisse erzielen Moeslund et al. [MMAL05, AL04], indem sie nah an den physikalischen Gegebenheiten bleiben. Sie setzen halbopake Polygone zu Systemen zusammen, die wie reale Schneeflocken aufgebaut sind. Auf die Schneeflocken wirken vier Kräfte: Schwer-, Auftriebs- und eine laminare Windangriffskraft sowie eine zufällige Kraft zur Modellierung der turbulenten Luftbewegung.

Parallel zu Moeslund et al. schlugen Wang et al. [WWXP06] eine voxelbasierte Methode zur Bewegung einfacher Schneeflocken-Billboards oder unscharfer Kugeln vor. Obwohl die mächtige Beschreibung der Boltzmann-Gleichung herangezogen wird, schluckt die Voxelbasierung den Großteil der kleinskaligen Turbulenz. Infolgedessen entsteht nur ein überschaubar realistischer Eindruck von Schneefall.

Darüber hinaus finden sich im Internet Hinweise auf weitere Publikationen zu virtuellem Schneefall. Sie liegen aber entweder nur auf Japanisch [HT02] vor oder sie sind Anwendungen bereits veröffentlichter Arbeiten (z.B. [TZWZ09]).

5.2.2. Schneeschmelze

Der einzige Ansatz, der explizit auf schmelzenden Schnee eingeht, ist in [MC00] beschrieben. Die Darstellung der Schneeschmelze beschränkt sich auf die thermisch bedingte Veränderung der geometrischen Form des Schnees, Veränderungen der optischen Oberflächeneigenschaften z.B. durch Wassereinlagerung sind nicht berücksichtigt. Auf Voxel Ebene wird die Wärmeaufnahme entweder durch Sonneneinstrahlung oder durch sonstige Wärmequellen mit Hilfe einer virtuellen Temperatur angegeben. Vor dem Entschluss, ob ein Schneevoxel verschwindet oder nicht, wird die virtuelle Temperatur eines Voxels lokal gemittelt. Leider sind öffentlich keine aussagekräftigen Abbildungen verfügbar. Der Ansatz von Foldes et al. [FB07] zur Erzeugung landschaftlicher Makroansichten beruht wie oben gezeigt auch auf sonnenscheinbedingter Schneeschmelze. Das Ergebnis liefert aber nur eine Textur mit transparenten Löchern an den Stellen der stärksten Sonneneinstrahlung (siehe Abb. 5.3 rechts).

5.2.3. Lokale Schneeuumlagerung und Kompaktifizierung

Die früheste Arbeit, die Schnee als umlagerbares Material behandelt, ist zugleich die einzige, die auch Schnee-Kompaktifizierung handhaben kann. Sumner et al. [SOH99] fassen Schnee als granulares Material auf, dass sich qualitativ genau wie Sand und Schlamm behandeln lässt. Dazu stellen sie eine zweidimensionale Höhenkarte auf, in der neben der Schneehöhe auch der Kompaktifizierungsgrad festgehalten ist. Kollidiert ein Starrkörper mit dem Höhenfeld, so wird der Schnee zunächst zu den Objektseiten umverteilt, bis die Schneehöhe unter dem Objekt an das Objekt anschließt. Der Schneeüberschuss an den seitlichen Objektgrenzen wird dann weiter nach außen verteilt, bis überall ein maximaler Böschungswinkel unterschritten ist. Alternativ zur Umverteilung kann auch die Kompaktifizierung unter dem Objekt erhöht werden, wie es in Abb. 5.5 unten dargestellt ist.

Wenn sich Schnee tatsächlich genauso wie Sand verhielte, dann wäre dieser Ansatz sehr brauchbar, insbesondere mit den Verbesserungen, die Onoue et al. [ON05] vorschlagen. Leider verfügt Schnee aber nur unter sehr speziellen Bedingungen über einen konstanten Böschungswinkel, zum Beispiel sehr nasser Schnee oder stark unterkühlter Schnee aus einfachen Eiskristallprismen unter antarktischen Bedingungen [Nak54].

In leicht erweiterter Weise wird das Höhenfeldprinzip auch in [Fea00a], [FO02], [MMAL05] und [Tok06] verwendet, um gefallenen Schnee umzulagern. Das Stabilitätskriterium ist jeweils ein maximaler Schüttwinkel oder die Windgeschwindigkeit. In rudimentärer Weise verfahren auch Wang et al. [WWXP06] nach diesem Schema.

Wieder bilden Muraoka et al. [MC00] durch ihre Nähe zu den physikalischen Verhältnissen eine Ausnahme. Hier wird die Möglichkeit zur Umlagerung des Schnees bereits durch den primären Akkumulationsschritt dargestellt. Ein Schneeflockenverbund im Voxelgitter lagert sich jeweils nur mit bestimmter Wahrscheinlichkeit an einem Ort an. Allerdings ist nicht explizit angegeben, ob dies nur bei tangentialer Berührung eines Schneevoxels gilt und ob es horizontale Verschiebungen geben darf nach einem abgewiesenen Anlagerungsversuch. In jedem Fall wäre Derartiges leicht zu integrieren.

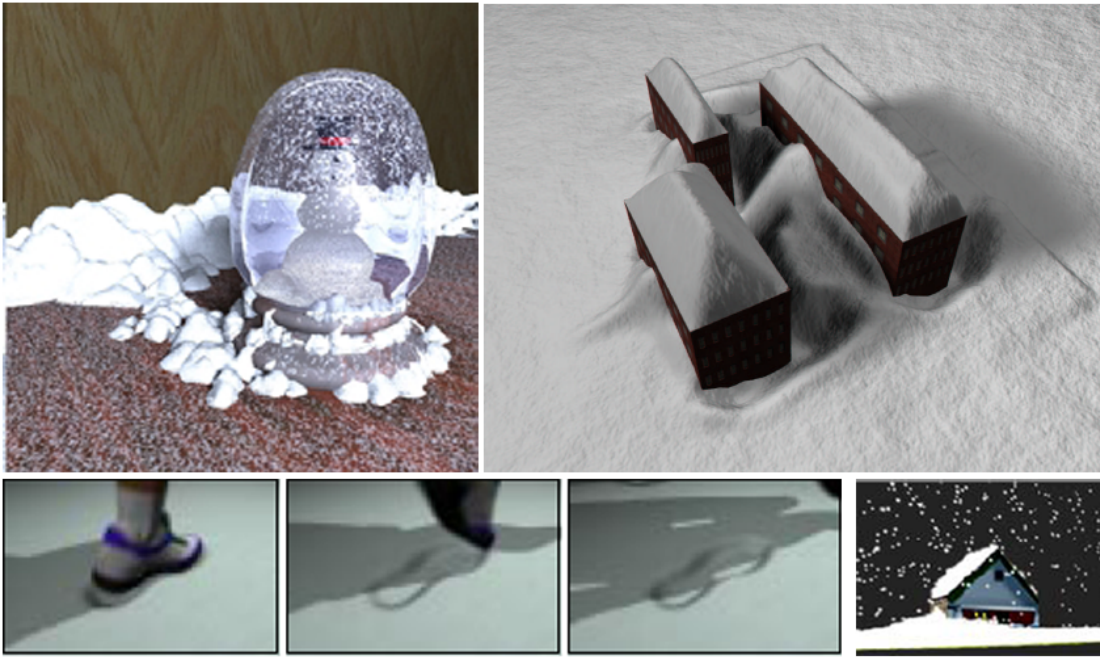


Abbildung 5.5.: Lokale Schneeuumlagerung. Oben: [Fea00a] und [FO02]. Unten: virtueller Fußabdruck im Schnee [SOH99], Einzelbild ganz rechts [WWXP06].

5.2.4. Bisher nicht modellierte Aspekte

Zwei Aspekte des Schnees sind in der computergraphischen Literatur bislang noch nicht berücksichtigt worden, obwohl ihre Umsetzung keine unüberwindliche Aufgabe darstellt. Dies ist erstens die mechanische Wechselwirkung des Schnees mit dem Untergrund, und zweitens alles, was mit der Alterung einer Schneeeauflage verbunden ist. Hier seien kurz zwei prinzipielle Möglichkeiten zur Realisierung skizziert.

Mechanische Wechselwirkung mit dem Untergrund

Die Auflast des Schnees macht sich in der Natur vor allem an Bäumen und Pflanzen bemerkbar. Architektonische Strukturen geben im Normalfall nicht nach im Schnee, und wenn doch, dann meist katastrophal. Zur Modellierung der mechanischen Eigenschaften von Bäumen gibt es inzwischen eine Reihe fundierter Ansätze [HKW09, DRBR09]. Die zu lösende Aufgabe bestünde schlicht darin, ein Modell zur Schneeformerzeugung für unterschiedliche Schneehöhen auf ein mechanisches Baummodell als Masse zu projizieren. Die größte Schwierigkeit ergäbe sich vermutlich aus der Möglichkeit von Topologieänderungen im Laufe der Beschneieung (siehe Abb. 4.3 Mitte).

Schneemetamorphose

Die Alterung von Neuschnee kann je nach Wetterlage ein weites Spektrum visueller Erscheinungen hervorrufen. Ein geschlossenes physikalisches Modell wäre sicherlich die beste Lösung, erscheint aber als anspruchsvoll wegen der vielen Phasenübergänge, die dabei zu beachten sind.

Prinzipiell müsste man unterscheiden zwischen reinen Oberflächenphänomenen und Formänderungen. Die Oberflächenphänomene sind physikalisch gut dokumentiert (z.B. [MM52, KZ04]), auch für metamorphisierten Schnee. Diese Prozesse könnte man vermutlich auf Bildebene statistisch auswerten und dann als Textur auf den Schneekörper abbilden. Ein Verfahren hat sich hier bereits für die Oberflächenalterung bewährt. Es beruht auf sogenannten Diffusionsabbildungen [CLL⁺05], mindestens eine computergraphische Umsetzung liegt bereits vor [LGG⁺07]. Aufwendiger ist die Modellierung dreidimensionaler Schneealterung, wie sie in Abbildung 4.7 links dargestellt ist. Mit prozeduralem Bump- oder Displacement-Mapping könnte man sich für Echtzeitanwendungen behelfen. Für Fotorealismus könnte man Verfahren zum Rendern von Fell [KK89] oder dichter Vegetation [DL05] anpassen. Alternativ wären auch Arbeiten zur Ero- oder Korrosion [NWD07, WCMT07] anwendbar.

5.3. Zusammenfassung

Offensichtlich ist das natürliche Phänomen Schnee reich genug, um vielfältige Verwendung unterschiedlichster computergraphischer Techniken zu ermutigen. Bisherige Arbeiten behandelten meist nur Teilaspekte. In Tabelle 5.1 sind die Hauptarbeiten zur Übersicht zusammengestellt. Die Besonderheit bei Schnee ist das Fehlen einer universellen und allgemeine anerkannten Standardlösung. Folglich gibt es auch keine allgemein als typisch akzeptierte geometrische Grundform der Schneebedeckung.

Im Hinblick auf die spätere Definition und Formalisierung dieser Grundform lassen sich die bisherigen Arbeiten in drei grundsätzliche Ansatztypen zur Schneeformerzeugung einteilen:

- ad-hoc-Ansätze, die sich rein aus der formalen Einfachheit und der visuellen Überzeugungskraft begründen ([NIDN97]),
- Höhenfeld-Ansätze, die Schnee als granulares und intern homogenes Material behandeln (fast alle Arbeiten im letzten Schritt, z.B. auch [Fea00a]),
- Meta-Partikel-Ansätze, die zumindest morphologische Ähnlichkeit zu echtem Schneefall aufweisen (am konsequentesten durchgeführt in [MC00]), allerdings entsprechen die Schneeflockenverbünde real mehreren tausend Schneeflocken, so dass es sich um eine sehr grobe Näherung handelt.

Prototypisch für die bisherige Herangehensweise ist [Fea00a], der alle drei Möglichkeiten mehr oder weniger begründet kombiniert. Der Grund für die generell unbefriedigende Systematik liegt nicht etwa an mangelndem Einsatz, sondern in der extremen Komplexität und Vielgestaltigkeit von Schnee in der Natur. Die Aussage, Schnee als komplexeste

	Textur	Form	Makroansicht	Schneefall	Schneeschemelze	Umlagerung
[NIDN97]	x	x				
[PTS99]			x			
[SOH99]						x
[MC00]	x	x		(x)	x	(x)
[Fea00a]		x				x
[FO02]		x				x
[HAH02]		x				
[OS04, Dud05]	x	x				
[LZK ⁺ 04]				x		
[MMAL05]		(x)		x		x
[Tok06]		x				x
[WWXP06]		(x)		x		
[SEN06]		(x)				
[Chr06]	x					
[FB07]			x		(x)	

Tabelle 5.1.: Übersicht über die modellierten Schneeaspekte in der computergraphischen Literatur. Fett gedruckte Markierung bedeuten Echtzeitfähigkeit, eingeklammerte Markierungen eingeschränkte Nutzbarkeit.

Substanz überhaupt zu bezeichnen [GM81], begründet sich aus einem breiten Faktenbestand, von dem ein Teil oben skizziert wurde.

In den folgenden Kapitel wird daher aus den Beständen der theoretischen Physik eine Methodik gewonnen, die systematisch von den mikroskopischen Schneeeigenschaften ausgeht. Daraus lässt sich mit statistischen Methoden eine analytische Definition der Form der Schneebedeckung auf visuellen Skalen gewinnen.

6. Physikalische Methoden zur Darstellung von Materialflüssen und Phasengrenzen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, dass es sich bei Schnee um ein Phänomen handelt, bei dem Anschauungen und Modelle aus den verschiedensten Bereichen gleichzeitig zur Anwendung kommen können. Der Schwerpunkt liegt in dieser Arbeit auf der Beschreibung der geometrischen Form der Schneebedeckung auf visuellen Skalen. Hierfür gibt es bislang keine physikalisch fundierte Erklärung. Bisherige Erklärungen enthielten sich einer Diskussion des Widerspruches zwischen geometrischer Glattheit von Schneeoberflächen auf visuellen Skalen einerseits und der extremen Komplexität im Inneren von Schneekörpern andererseits. Die folgenden theoretischen Untersuchungen dienen zur Etablierung eines formalen Fundaments, auf das die spätere computergraphische Schneemodellierung aufbauen kann.

Wenn man für einen Moment der Kraft des Analogieschlusses trauen mag, dann offenbart sich ein universelles Phänomen. Sehr viele Schneeflocken zusammen erzeugen ein Erscheinungsbild, das sich aus einer einzelnen Flocke nicht beschreiben lässt. Die glatte Großstruktur einer Schneedecke hat nichts gemein mit der kantigen Vielfalt der verkeilten Eiskristalle im Kleinen. In der Natur lässt sich das gleiche Prinzip immer wieder beobachten.

Die Teilgebiete der Thermodynamik und der statistischen Physik befassen sich mit derartigen Zusammenhängen. Das ideale Gas steht als prototypisches Vorbild. Seine mikroskopische Struktur aus unzähligen Stößen einzelner Atome lässt sich per statistischer Auswertung in einen universellen makroskopischen Zusammenhang von Druck, Temperatur und Volumen überführen. Entscheidend für die Gültigkeit der makroskopischen Beschreibung sind einige wenige allgemeine mikroskopische Annahmen über die beteiligten Atome. Der genaue dynamische Ablauf im inneren des Gases spielt dann keine Rolle mehr.

Ein weiteres Beispiel ist die Elastizität, die bei einzelnen Atomen unmessbar und kaum definierbar ist, im makroskopischen aber deutlich in Erscheinung tritt. Auch die Navier-Stokes-Gleichung lässt sich als Näherung einer mikroskopischen Theorie herleiten [Hau97]. Merkwürdigerweise neigen auch Menschenansammlungen zu einem ähnlichen Phasenübergang zwischen Einzel- und Massenverhalten [Bon82]. Die berühmte „La Ola“ in Fußballstadien ist eine eher harmlose Variante davon.

Das Erscheinen neuer Eigenschaften aus dem Zusammenfügen vieler Einzelteile wird allgemein auch als Emergenz bezeichnet. Es ist der Alptraum eines jeden Reduktionisten, weil es der systematischen Vorhersagbarkeit Grenzen setzt, unabhängig von jeglicher Unschärferelation. Für die Beschreibung der Schneeform bekümmert derlei nicht, da das ungefähre Erscheinungsbild des Schnees bereits im Vorfeld bekannt ist. Aller-

dings taucht eine zusätzliche Schwierigkeit auf, wenn im Folgenden der Zusammenhang zwischen Schneeflocke und Schneebedeckung diskutiert wird. Denn makroskopische Beschreibungen können plötzlichen qualitativen Änderungen unterworfen sein, in Form von Phasenübergängen. Phasenübergänge ereignen sich immer dann, wenn ein makroskopischer Ordnungsparameter einen kritischen Punkt passiert. Für Schnee ist dies offensichtlich die Temperatur bei 0°C. Daneben gibt es aber noch mindestens einen weiteren dynamischen Phasenübergang der Struktur, wie im Folgenden gezeigt wird.

6.1. Mikroskopische Modelle

Es ist offensichtlich ein aussichtsloses Unterfangen, ein Schneegestöber mittels expliziter Schneeflockentrajektorien zu formalisieren. Allen Vielteilchensystemen eignet diese Problematik. Einen universellen Ausweg bietet der Übergang zu einer statistischen Beschreibung, wie ihn am prominentesten Boltzmann in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts propagiert hat. Statt einzelner Partikel werden die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Partikel betrachtet. So wird aus diskreten, deterministischen Partikeln das stochastische Kontinuum des Wahrscheinlichkeitsdichtefluids. Boltzmann hatte so ohne sein Wissen¹ den formalen Weg bereitet für die Quantenmechanik, die sich erst ein halbes Jahrhundert nach ihm öffentlich etablieren sollte. Mit der statistischen Methode lässt sich auch das Phänomen der Schneeakkumulation vollständig ausdrücken. Zum Verständnis der statistischen Betrachtungen muss man zunächst eine formal exakte Charakterisierung vornehmen.

6.1.1. Formale Schneecharakterisierung mit einer Vielteilchen-Hamilton-Funktion

Im Folgenden² wird eine Szene angenommen, deren Beschneieung vollständig durch die Lage $\vec{r}_\alpha \in \mathbb{R}^3$ und den Impuls $\vec{p}_\alpha \in \mathbb{R}^3$ (bzw. die Geschwindigkeit \vec{v}_α) einer Menge gleichartiger Schneeflocken mit konstanter Anzahl N charakterisiert ist. Eine Schneeflocke ist dann gegeben durch einen sechsdimensionalen Phasenraumvektor $\vec{r} = \{\vec{p}, \vec{r}\}$. Der Phasenraumvektor $\vec{\Gamma} = \{\vec{r}_\alpha\}$ gibt den exakten Mikrozustand des gesamten Schnees auf molekularer Ebene an. Um die Dynamik des Systems angeben zu können, muss man die Hamilton-Funktion, d.h. die Gesamtenergie des Systems als Funktion der Phasenraumkoordinaten aufschreiben. Formal lässt sich die Hamilton-Funktion als

$$H(\{\vec{r}_\alpha\}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \Phi(\{\vec{r}_\alpha\}) \quad (6.1)$$

ausdrücken, wobei $\Phi(\{\vec{r}_\alpha\})$ innere und äußere Kräfte als Potential beschreibt. Die beiden Teile des Potentials haben die Form

$$\Phi(\{\vec{r}_\alpha\}) = \Phi_{ext} + \sum_{\alpha,\beta=1}^N \Phi_{\alpha\beta}, \quad (6.2)$$

¹Beziehungsweise ohne überlieferte Veröffentlichung.

²Die Notation folgt [Spa04] und [Hau97].

wobei der erste Term auf der rechten Seite äußere Kräfte beschreibt, wie zum Beispiel auch den Untergrund, den die Schneeflocken nicht durchdringen können. Der zweite Term $\Phi_{\alpha\beta}$ enthält die Wechselwirkungskräfte zwischen allen Partikeln. Er hängt nur von Abständen $\|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta\|$ zwischen den Partikeln ab und kann auch Koagulation, d.h. die Zusammenballung von zwei oder mehr Schneeflocken enthalten. Die Kräfte des Partikelsystems (3.2) ergeben sich aus (6.2) wie üblich per Ableitung nach den Ortskoordinaten. Die zeitliche Entwicklung des Systems (6.1) ist durch die Bewegungsgleichung über

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_\alpha} \quad (6.3)$$

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_\alpha} \quad (6.4)$$

gegeben.

Damit steht der formale Rahmen, um Schneefall und Schneeakkumulation exakt zu beschreiben. Allerdings verbleibt als anspruchsvolle Aufgabe, das Potential Φ genau zu spezifizieren. Der Untergrund (d.h. die zu beschneide Szene) müsste dabei in Φ_{ext} als unüberwindliche Potentialbarriere angegeben werden, außerdem müsste man hier Gravitation und Windkraft hinzufügen. Wenn man zusätzlich noch die Wechselwirkung zwischen dem Schnee und den äußeren Kraftfeldern berücksichtigen will, dann muss für Φ_{ext} noch eine Abhängigkeit von den Partikelimpulsen und -orten angegeben werden. Die Ausbildung und Form der Schneedecke wäre implizit im Wechselwirkungspotential $\Phi_{\alpha\beta}$ definiert. Mindestens zwei Phänomene sind zu beachten: einerseits die Möglichkeit der Koagulation von Schneeflocken im freien Fall, und andererseits die Kompaktifizierung der Schneeflocken, nachdem sie auf dem Boden gelandet sind. Auch Phasenübergänge von Eis zu Wasser müsste man als Potential darstellen.

Das System (6.3) ist praktisch unlösbar für Schnee, und die große Flockenzahl N^3 wäre wohl das kleinste Problem. Schwerwiegender ist die hochgradige Nichtlinearität aller Wechselwirkungen. Sie macht alle Hoffnung auf analytische Lösung der exakten Bewegungsgleichung zunichte.

6.1.2. Statistische Formulierung der Vielteilchenbeschreibung

Die exakte Bewegungsgleichung enthält günstigerweise deutlich mehr Information als eigentlich benötigt. Das Erscheinungsbild kann für eine große Anzahl von Mikrozuständen $\vec{\Gamma}$ identisch, d.h. visuell ununterscheidbar sein. Es gilt daher, den gesamten Phasenraum auf seine visuell bedeutsamen Anteile zu reduzieren. Der formale Weg führt über die statistische Betrachtung. Dazu ordnet man dem Phasenraum Γ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ρ zu, so dass jedem Phasenraumelement (d.h. Mikrozustand) $d\Gamma = d^6\vec{r}_1 \dots d^6\vec{r}_N$ eine Wahrscheinlichkeit $\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)d\Gamma$ entspricht und für den gesamten Phasenraum die Normierung $\int \rho d\Gamma = 1$ gilt. Die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch die deterministischen Bewegungsgleichungen (6.3) gegeben. Die Bewegungs-

³Für einen Quadratmeter mit einer 10 cm hohen Schneedecke wären etwa 10^7 einzelne Eiskristalle nötig [Nak54].

6. Physikalische Methoden zur Darstellung von Materialflüssen und Phasengrenzen

gleichungen definieren so einen Fluss der Wahrscheinlichkeitsdichte, für den eine Kontinuitätsgleichung der Form (3.3) gelten muss. Dabei ist die Wahrscheinlichkeitsdichte die advehierte Größe, so dass man mit der Normierung schreiben kann

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} \frac{\rho}{d\vec{\Gamma}} = 0. \quad (6.5)$$

Man kann zeigen, dass die partielle Zeitableitung $\partial_t \rho$ für konservative Systeme verschwindet, der Wahrscheinlichkeitsdichtefluss also inkompressibel wird. Den inkompressiblen Anteil kann man mithilfe der Bewegungsgleichungen umschreiben zur berühmten Liouville-Gleichung. Die Liouville-Gleichung schreibt sich als

$$\frac{d\rho}{dt} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial t} \right) = -D, \quad (6.6)$$

wobei D für die Dissipation, d.h. für die Energieverlustrate steht⁴. Geometrisch kann man die Dissipation als Kontraktion des Phasenraumes verstehen. Der praktische Nutzen der Liouville-Gleichung ist zunächst klein. Allerdings eröffnet der Übergang von Partikeln zu einem kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsfeld die Möglichkeit der Anwendung einer Vielzahl formaler Methoden und hilfreicher Interpretationen. Die Dualität von Welle und Teilchen beispielsweise lässt sich in dieser Sichtweise aufheben. Der grundsätzliche Vorteil besteht in der systematischen Ableitbarkeit makroskopischer Größen in Form von geeigneten Mittelwertbildungen. Einfache Interpretationen gibt es zum Beispiel für die Einteilchen-Randverteilung f , die sich aus der Integration von ρ über alle anderen Teilchen als

$$f(\vec{p}, \vec{r}, t) = \int_{R^6} \dots \int_{R^6} \rho(X_2 \dots dX_N, t) dX_2 \dots dX_N \quad (6.7)$$

ergibt. f ist ein Maß für die Anzahl einzelner Teilchen, die sich in einem bestimmten Impuls- und Ortsintervall $[\vec{p} + d\vec{p}] \times [\vec{r} + d\vec{r}]$ befinden. Für den Schnee lassen sich aus f zwei anschauliche Größen gewinnen. Eine ist die Schneemassendichte, die sich aus dem Produkt aus Schneeflockenmasse m und f ergibt: $\rho_{Schnee} = m \cdot f(\vec{p}, \vec{r}, t)$. Für $\vec{p} \approx 0$ sind damit beispielsweise die Orte mit akkumuliertem Schnee definiert. Andererseits kann man durch den Impulsmittelwert von f eine ortsabhängige Schneefallstärke \mathbf{J} charakterisieren als $\mathbf{J} = \int_{R^3} f(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p}$.

Darüber hinaus lässt sich näherungsweise auch die Kinetik mit der Einteilchenverteilung ausdrücken. Deren Herleitung beruht auf der sogenannten BBGKY⁵-Hierarchie, die aus einer rekursiven Kaskade von Randverteilungen der Gesamtwahrscheinlichkeitsdichte ρ besteht. Letztendlich ergibt sich dabei die Kinetik einer n -Teilchenverteilung aus den Wechselwirkungen in der $n + 1$ -Teilchenverteilung. Mit verschiedenen Zusatzannahmen, die jenseits des Rahmens dieser Arbeit liegen, kann man so auch die sog. Boltzmann-Gleichung ableiten. Sie lautet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f - \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi_{ext}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f = I_{coll}. \quad (6.8)$$

⁴Mit $D = 0$ für konservative Systeme

⁵Abkürzung für die Namen der fünf Entdecker **B**ogoljubow, **B**orn, **G**reen, **K**irkwood und **Y**von, die die Methode unabhängig voneinander in der Zeit zwischen 1935 und 1946 erkannten.

Auf der linken Seite stehen neben der partiellen Zeitableitung der Advektionsterm und der Term äußeren Kräfte ausgedrückt über das Potential Φ_{ext} . Alle Wechselwirkung ist auf der rechten Seite im sogenannten Stoßintegral I_{coll} zusammengefasst. Das Stoßintegral gibt alle Wechselwirkungen von Teilchenpaaren an. Eine Formulierung des Stoßintegrals lautet

$$I_{coll}(\vec{p}, \vec{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int \Phi_{12}^{coll}(|\vec{r} - \vec{r}_2|) f(\vec{p}_2, \vec{r}_2, t) d^3 \vec{r}_2 d^3 \vec{p}_2, \quad (6.9)$$

dabei ist Φ_{12}^{coll} das Potential der Zweiteilchenwechselwirkung. Eine anschaulichere Form beruht auf einer Wahrscheinlichkeitstransferfunktion $w(\vec{p}', \vec{p}_2', \vec{p}, \vec{p}_2)$ als

$$I_{coll}(\vec{p}, \vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} w(\vec{p}', \vec{p}_2', \vec{p}, \vec{p}_2) (f' f_2' - f f_2) d\vec{p}' d\vec{p}_2' d\vec{p}_2. \quad (6.10)$$

Das Stoßintegral lässt sich jetzt verstehen als Änderung der Einteilchendichte f , die sich aus dem Zusammenstoß zweier Impulse \vec{p}' und \vec{p}_2' am Ort \vec{r} ergibt. Alle Möglichkeiten werden aufintegriert und mit dem Produkt aus Transfer- und Zustandswahrscheinlichkeit gewichtet. Es ist denkbar, dass sich diese Gleichung auch zur Beschreibung des Schneeflockenstromes in der Luft eignet. Die Transferfunktion w hat eine ähnliche Funktion wie die BRDF⁶ in der Rendergleichung. Das genaue Aussehen von w hängt von der mikroskopischen Theorie ab. Die Formulierung von (6.10) ermöglicht die praktische makroskopische Interpretation in Form von Bilanzgleichungen, wie sie zum Beispiel im Radiosity-Verfahren genutzt wird. Auch für Schnee ist die Umdefinition des Stoßintegrals eine Modellierungsmöglichkeit, wie im folgenden Abschnitt skizziert wird.

6.2. Makroskopische Modelle

Für die Modellierung der Form einer Schneebedeckung ist die Schneehöhe in der Szene eine wesentliche makroskopische Größe. Einen ersten Hinweis gibt die Gesamtschneemasse M in einer Szene, die sich schlicht aus der mittleren Schneefallstärke \mathbf{J} und der Dauer T des Schneefalls ergibt. Die mittlere Schneehöhe \bar{h} ergibt sich dann mit der Gesamtfläche A der Szene als $\bar{h} = T \cdot \mathbf{J} / A$. Allerdings steht dazu noch aus, die Fläche A präzise zu definieren. Darüber hinaus lässt sich aus der Angabe einer Schneehöhe noch keine Oberfläche berechnen. Dazu müssen erst die Richtung der Schneehöhe und mögliche Überschneidungen spezifiziert werden. Es wird sich zeigen, dass die exakte Position der Schneeoberfläche im Phasenraum einer Unstetigkeit entspricht, d.h. einem Phasenübergang.

6.2.1. Schneevertelung als globales Strahlungsgleichgewicht

Die genaue geometrische Verteilung einer Masse Schnee in einer Szene ist das Produkt eines Transportprozesses in der Szene. Die Hauptrichtung des Transportes führt offensichtlich vom Himmel zum Untergrund. Wie die Beobachtungen in Kapitel 4 gezeigt

⁶Bidirectional Reflectance Distribution Function.

haben, liegt das visuelle Hauptmerkmal der Schneebedeckung jedoch in ihrem Verhalten an Ecken und Kanten. Dort entwickelt der Schnee charakteristische Abrundungen, die sich unabhängig von der zugrundeliegenden Geometrie zeigen. Dabei spielt der sekundäre Transport zwischen verschiedenen Segmenten der Szene die entscheidende Rolle. In der Nähe von Kanten bleibt der Schnee nicht immer liegen, stattdessen verteilt er sich auf tieferliegende Szenenbereiche. Das gleiche gilt für sehr steile Bereiche; verdeckte Bereiche erhalten weniger Schneeflocken von oben unabhängig von ihrer Struktur; und Bereiche unterhalb von Kanten können zusätzlichen Schnee erhalten. Offenbar existieren in der Tendenz der Einteilchenverteilung $\partial_t f$ szenen- bzw. randbedingungsabhängige Korrelationen. Die Gesamtheit der Korrelationen stellt ein Netzwerk von Transportverbindungen zwischen allen Szenenbereichen dar. Genau dieses Netzwerk lässt sich verwenden um die Zeitentwicklung der Einteilchenverteilung (6.8) zu vereinfachen. In einer Raumdimension mit kontinuierlicher Indizierung $y \in \mathbb{R}$, kann man die Kinetik dann in Form einer Mastergleichung [Pik03, Hau97]

$$\frac{\partial \rho(y, t)}{\partial t} = \int_{\forall y' \in A} [w(y|y')\rho(y') - w(y'|y)\rho(y)] dy' \quad (6.11)$$

aufschreiben. $w(y'|y)$ bedeutet dabei die Übergangs- bzw. Transportwahrscheinlichkeit vom Ort y nach y' , und A den betrachteten Linienabschnitt. Analog kann man auch für zwei Dimensionen vorgehen. Wenn man eine geeignete Wahl an Szenenbereichen definiert hat (also z.B. wie bei Fearing [Fea00a] alle himmelwärts weisende Flächen) und zu einer diskreten Flächenindizierung übergeht, dann kann man die Mastergleichung auch als nicht-rekurrente Markovkette auffassen. Der Himmel entspräche dabei dem Anfangszustand, der am Anfang als einziger die Wahrscheinlichkeit eins zugewiesen bekäme.

Offenbar verfügt bei der sukzessiven Schnee- bzw. Wahrscheinlichkeitsumverteilung jedes Segment über eine spezifische, relative Schneehaltfähigkeit, d.h. eine Schneekapazität $c \in [0, \infty[$. Die Schneekapazität ist ein Maß für die Abweichung der theoretischen mittleren Schneehöhe \bar{h} . Bis hierhin ist die Schneeverteilung formal identisch mit dem Problem der Lichtverteilung beim Radiosity-Verfahren. Die genauen Strukturen von $w(y'|y)$ weichen zwar voneinander ab, aber nur qualitativ in ihrer Richtungs- und Reflexionscharakteristik. Es besteht jedoch ein grundlegender Unterschied. Die Visualisierung des Lichttransports ist eine einfache proportionale Umrechnung: je mehr Licht an einem Ort ankommt, desto größer die Helligkeit in der Darstellung.

Dieser lineare Zusammenhang gilt bei Schnee nicht. Denn der Schnee kann sich selbst beeinflussen. Während für Licht der Kollisionsterm aus (6.8) verschwindet⁷, weist er bei Schnee eine komplexe nichtlineare Struktur auf. Wenn der Schnee auf den Boden gelangt, dann verändert und erweitert er das Potential, das zu Anfang den Untergrund definiert hat. Anders gesprochen: der Schnee kondensiert aus der wechselwirkungsarmen Flugphase zur stark wechselwirkenden Akkumulationsphase. Bei der Kondensation bildet sich eine Phasenübergangsfront, die scharf, d.h. unstetig zwei unterschiedliche Dichten voneinander trennt. Die Front wirkt selbst genauso, wie die Struktur der zugrundeliegenden Szene. Es handelt sich also um ein intrinsisch rekursives Phänomen.

⁷Zumindest für computergraphisch relevante Lichtintensitäten.

Die Lage dieser Unstetigkeitsfront ist die visuell maßgebliche makroskopische Größe. Sie steht in einem rekursiven bzw. nichtlinearen Zusammenhang mit den grundlegenden Bewegungsgleichungen, wodurch eine exakte analytische Darstellung im Rahmen dieser Arbeit nicht durchführbar ist (und zur computergraphischen Modellierung auch nicht notwendig ist). Mit dem Wissen um die mikroskopischen Details lässt sich jedoch eine verwertbare phänomenologische Darstellung begründen, die im Folgenden entwickelt wird. Der formale Zusammenhang der Front mit der Einteilchendichteentwicklung (6.8) steckt im Stoßintegral. Statt der Wechselwirkung zwischen Teilchenpaaren kann man dort die Wechselwirkung eines Teilchens mit der Unstetigkeitsfront einordnen: berührt eine Schneeflocke die Schneeoberfläche, so wird sie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit absorbiert, um zu einer Lageänderung der Front beizutragen. Später wird sich zeigen, dass die Auswertung der Gleichung (6.8) nur als externer Antrieb bzw. genähert als Rand- und Anfangsbedingungen in die Oberflächenbeschreibung eingeht.

6.2.2. Lokale stochastische Darstellung als getriebene Oberfläche

Zunächst wird der formale Rahmen zur Entwicklung von Oberflächen dargestellt. Der Rahmen ist eine phänomenologische und mikroskopische Beschreibung, der für die Schneeoberfläche lokal zutrifft. Überhänge und Schneebrücken werden damit noch nicht beschrieben. Für die Oberflächeneigenschaften auf der Skala von Zentimetern und weniger, d.h. computergraphisch die Materialeigenschaften, liefert die Theorie aber nützliche Anhaltspunkte. Als erstes bedarf es der Einführung des Konzeptes der stochastischen Differentialgleichung. Denn Oberflächen, die wie auch Schnee durch Partikelanlagerung entstehen, zeigen meistens fraktale Eigenschaften [BS95]. Fraktalität ist vor allem durch Selbstähnlichkeit gekennzeichnet: Großstrukturen wiederholen sich selbst in immer weiter verkleinerten Varianten. Fast jede natürliche Oberfläche zeigt diese Eigenschaft, zumindest innerhalb gewisser Größenordnungen. Analytisch ist Selbstähnlichkeit nicht leicht darstellbar, weil fraktale Kurven wie zum Beispiel die Koch'sche Schneeflocke (Abb. 6.1) zwar stetig, aber nicht differenzierbar sind.

Die Klasse der stochastischen Differentialgleichungen wurde zu diesem Zweck entwickelt. Die Edward-Wilkinson-Gleichung ist ein Standardbeispiel dieser Klasse zur Beschreibung des Wachstums einer Oberfläche, die sich als Höhenfeld darstellen lässt. Eine genaue Herleitung ist in [EW82] bzw. [BS95] gegeben, sie beruht im Wesentlichen auf einer Reihe von Symmetriebetrachtungen, die die meisten Termformen ausschließen. Am Ende erhält man als grundlegende Form

$$\frac{dh(\vec{x}, t)}{dt} = \nu \nabla^2 h + \xi(\vec{x}, t). \quad (6.12)$$

Dabei ist $h(\vec{x}, t)$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ die Lage der Oberfläche und $\nabla^2 h$ der Diffusionsterm, der dafür sorgt, dass starke Krümmungen der Oberfläche abgeschwächt werden. Der Faktor ν kann daher als Diffusionskoeffizient oder als Oberflächenspannung interpretiert werden. In $\xi(\vec{x}, t)$ ist der stochastische Anteil der Gleichung zusammengefasst. Er modelliert den Prozess der Partikelanlagerung als eine kontinuierliche Zufallsvariable, die zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort erneut realisiert wird. Folglich kann man auch die Momen-

6. Physikalische Methoden zur Darstellung von Materialflüssen und Phasengrenzen

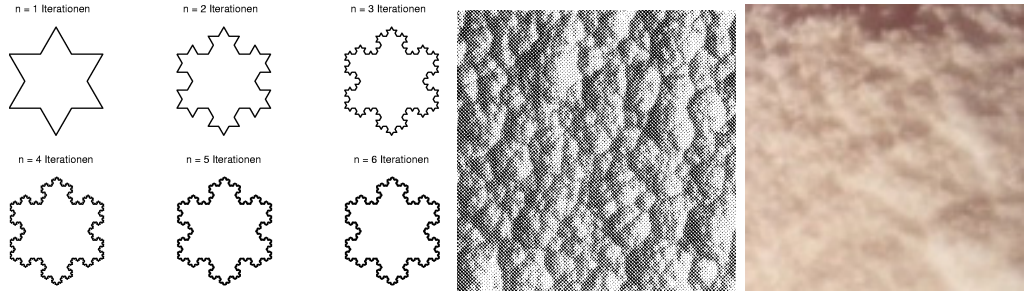


Abbildung 6.1.: Links: Koch'sche Schneeflocke, benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch. Sie entsteht durch iterative Drittelung und Rekombination einer Strecke. Mitte: Detail der fraktalen Oberfläche von pyrolithischem Graphit aus [Yeh85], die mit einer KPZ-Gleichung 6.14 beschrieben werden kann. Kantenlänge ca. 2 mm. Trotz des andersartigen Entstehungsprozesses zeigen sich selbstähnliche Strukturen, die deutlich an Schneeoberflächen erinnern (rechts).

te von $\xi(\vec{x}, t)$ angegeben. Allgemein verschwindet für die Edward-Wilkinson-Gleichung der Mittelwert des Rauschens ξ , außerdem ist es unkorreliert in Raum und Zeit: es gilt $\langle \xi(\vec{x}, t) \rangle = 0$ und $\langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle = 2J\delta^d(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t')$ in d Raumdimensionen (für Schnee 2) und J als Maß für die Rauschintensität bzw. Partikelstromdichte \mathbf{J} direkt über der Oberfläche. Dies entspricht freiem Schneefall ohne geometriebedingte Korrelationen, d.h. dem Normalfall an der Schneeoberfläche auf Zentimeterskala und kleiner. Der unstetige Term ξ lässt sich im Detail unterschiedlich interpretieren. Grundsätzlich gilt die integrale Interpretation, die in einem expliziten Eulerschritt die Form

$$h(\vec{x}, t + \Delta t) = L(\vec{x})\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \xi(\vec{x}, t') dt' \quad (6.13)$$

trägt (wobei $L(\vec{x})$ der Übersichtlichkeit halber eine abgekürzte Schreibweise für die Integration des Laplace-Operators aus (6.12) bedeutet).

Die statistische Auswertung von Ergebnishöhenfeldern $h(\vec{x})$ der Edwards-Wilkinson-Gleichung ermöglicht die Erklärung eines entscheidenden Resultats, das für die Schneemodellierung von Bedeutung ist: es ist die Skalenfreiheit von Oberflächen, die durch Partikelakkumulation entstehen⁸. Solche Oberflächen enthalten auf verschiedensten Größenordnung gleiche Häufigkeitsverteilungen von Unebenheiten. In der Computergraphik wird diese weit verbreitete Eigenschaft durch Perlin-Rauschen [EMP⁺98] erzeugt. Aus der voranstehenden Überlegung folgt, dass die Oberflächenrauigkeit von Schnee am besten durch Perlin-Rauschen dargestellt wird. Dieses Ergebnis wird bei der Schneevisualisierung in Kapitel 9 weiterverwendet.

Neben der Grundform der Edwards-Wilkinson-Gleichung (6.12) gibt es noch einige Varianten mit verschiedenen Zusatztermen. Für die Schneemodellierung ist eine Ver-

⁸Im Detail ist diese Herleitung in z.B. [BS95] ausgeführt.

allgemeinerung davon von Bedeutung, und zwar die sogenannte KPZ-Gleichung⁹. Man erhält sie, indem man eine der Symmetrieanforderung der Edwards-Wilkinson-Gleichung fallen lässt. Indem man gestattet, dass die Fluktuationen des Höhenfeldes $h(\vec{x})$ von der Gesamthöhe abhängen dürfen, kann man Oberflächenwachstum in Richtung der Oberflächennormale darstellen und skalieren. Terme der Form $(\nabla h)^n$ werden so zulässig. In der Grundform ergibt sich die KPZ-Gleichung dann als

$$\frac{dh(\vec{x}, t)}{dt} = \nu \nabla^2 h + \lambda (\nabla h)^2 + \xi(\vec{x}, t). \quad (6.14)$$

wobei λ ein Maß für die Wachstumsgeschwindigkeit in Normalenrichtung ist. Neues Material wird jetzt nicht nur über ξ aufgebracht, sondern auch über den neuen Term $\lambda(\nabla h)^2$. Der Glättungsterm $\nu \nabla^2 h$ bleibt erhalten. Offensichtlich ist das Wachstum in Normalenrichtung genau der Prozess, der bei Schneefall Überhänge in der Nähe von Abrisskanten bewirkt. Daher ist die KPZ-Gleichung mutmaßlich die beste bekannte phänomenologische Gleichung, um das Wachstum von Schneeoberflächen zu beschreiben.

Leider erlaubt aber die Darstellung einer Oberfläche mittels Höhenfeld keine Ausbildung von Überhängen. Maximal können sich senkrechte Höhenprofile bilden, aber keine echten Überhänge wie in Abbildung 4.5 in der Mitte gezeigt. Die Verwendung der Theorie der getriebenen Oberflächen auf die computergraphische Schneemodellierung erfordert daher eine Übertragung auf den dreidimensionalen Fall.

In der Physik ist dies offenbar nur für die Phasengrenze zwischen magnetischen Domänen in drei Dimensionen durchgeführt worden. Aufgrund der Nichtlinearität von (6.14) liegen bisher aber nur numerisch-diskrete Untersuchungen für sehr kleine Raumaufteilungen vor [KZ89]. Der Grund für diesen Mangel liegt vermutlich darin, dass sich der Höhenfeldansatz immer zumindest in einer kleinen lokalen Umgebung heranziehen lässt. Solche lokalen Ansätze müssen für die computergraphische Schneemodellierung erst noch aufbereitet werden.

6.2.3. Oberflächenentwicklung als Reaktionsdiffusion

Eine global definierbare Möglichkeit zur Formalisierung von Fronten in drei Raumdimensionen stellen Reaktionsdiffusionsgleichung dar. Der Raum enthält hier (mindestens) zwei skalare Dichtewerte ρ_a und ρ_b , die die Konzentration zweier (oder mehrerer) Substanzen darstellen. Die beiden Substanzen reagieren miteinander, wobei im einfachsten Fall die eine Substanz verbraucht wird, um sich in die andere umzuwandeln. Dadurch entstehen Reaktionsfronten, die durch den Raum per Diffusion propagieren. Dabei kann die Front auch durch eine dritte Substanz gekennzeichnet sein, also durch ein Zwischenprodukt der Dichte ρ_m , das schnell in ρ_b zerfällt. Brennender Wald ist ein klassisches Beispiel für diesen Prozess: ρ_a stellt die Holzdichte dar, ρ_m die Flammendichte und ρ_b die Aschendichte.

⁹KPZ steht für Kardar, Parisi und Zhang, die die Gleichung 1986 als vorschlugen [KPZ86] und untersuchten.

6. Physikalische Methoden zur Darstellung von Materialflüssen und Phasengrenzen

Die allgemeine Form einer Reaktionsdiffusionsgleichung ist dann

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_a &= -k\rho_a\rho_m + D\nabla^2\rho_a \\ \dot{\rho}_m &= k\rho_a\rho_m - \mu\rho_m + D\nabla^2\rho_m\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$\dot{\rho}_b = \mu\rho_m + D\nabla^2\rho_b,\tag{6.16}$$

wobei k die Reaktionsgeschwindigkeit oder Umwandlungsrate zwischen Substanz a und m ist und μ ein Maß für die Lebensdauer der Substanz m bis sie sich in b umwandelt. D und der Operator ∇^2 stehen für die räumliche Diffusion aller Substanzen. Die Gleichungen sind abhängig von einander, d.h. es reichen die ersten beiden Gleichungen aus. Wenn man die Gesamtdichte als normiert auf eins annimmt dann ist $1 - (\rho_a + \rho_m) = +\rho_b$.

Diese Prinzip kann man auf die Schneedeckenentstehung übertragen. Dazu braucht man nur zwei Substanzen bzw. Phasen: die Dichte des freien Schneefalls $J(\vec{r})$ und die Dichte des gefallenen Schnees $S(\vec{r})$. Die Propagation der Reaktionsfront erfolgt bei Schnee allerdings nicht isotrop, sondern hauptsächlich entgegen der Schwerkraft. Diesen Sachverhalt kann man mit einem anisotropen Faktor f vor dem Diffusionsterm ausdrücken. Der Wert des Vorfaktors hängt von der Orientierung der Schneeoberfläche ab, d.h. vom Gradienten der Schneedichte $\vec{\nabla}S$. Gleichung (6.15) bekommt dann die schneespezifische allgemeine Form

$$\begin{aligned}\dot{J}(\vec{r}) &= -kJ S + f(\vec{\nabla}S)\nabla^2 J \\ \dot{S}(\vec{r}) &= kSJ + f(\vec{\nabla}S)\nabla^2 S.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Die Diffusionsrate steckt hier implizit in der Anisotropie f . Gleichung (6.17) ist an zwei Stellen nichtlinear und analytisch nur für Spezialfällen lösbar. Sie gibt aber einen formalen Ausdruck für die dreidimensionale Entwicklung der Schneeverteilung in einer Szene an. Die exakte Position der Schneeoberfläche ergibt sich aus der Wahl einer Isolinie der Schneedichte S . Zur numerischen Lösung muss man die Anfangswerte von J im allgemeinsten Fall aus (6.8) bestimmen und die Randbedingungen entsprechend der zu beschneidenden Szene wählen. Außerdem ist die genaue Form von f zu ermitteln.

Ein Beispiel in zwei Dimension soll stattdessen den Nutzen von (6.17) als Ausgangspunkt numerischer Näherung zeigen. Dazu bedarf es mehrerer Annahmen. Die erste betrifft die Ermittlung der Schneefalldichte. Sie wird als stationär in Form eines äußeren Antriebs gewählt. Damit sind Rückwirkungen der Schneedecke auf die Schneefallströmungsmuster ausgeschlossen. Die räumlichen Intensitätsschwankungen des Schneefalls sind dann reine Folge der Verdeckung. Sie muss nicht auf die vertikale Richtung beschränkt sein, denn Wind kann Verwirbelung und turbulente Verteilungsmuster bewirken. Um diese Muster zu berechnen, muss man wie in [FO02] eine vollständige Fluidsimulation des Windes durchführen. Das Prinzip von (6.17) lässt sich aber schon mit einer einfacheren Annahme demonstrieren. Für zweidimensionale Simulation werden vertikal unverdeckte Bereiche auf eine konstante Schneefallnormalstärke gesetzt, verdeckte auf einen verminderten Wert und vertikal freie Bereiche unterhalb von Szenenkanten auf

einen erhöhten Wert (siehe Abb. 6.2 ganz links). Die Anisotropie f ist als

$$f = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\alpha) \right)^3 \quad (6.18)$$

mit $\cos(\alpha) = (\vec{Y} \cdot \vec{\nabla} S) / (|\vec{\nabla}| |\vec{Y}|)$ und \vec{Y} als Schneefallhaupttrichtung. Diese ad-hoc-Form ergibt sich aus der Forderung, in Schneefallrichtung maximal, entgegengesetzt dazu Null und dazwischen kontinuierlich und symmetrisch zu sein. Abbildung 6.2 zeigt die Entwicklung der Schneedichte mit diesen Annahmen für zwei Dimensionen. Der Szenenuntergrund wurde initialisiert mit $J = 0$ und $S = 1$. Bei der Simulation wurde nur die Gleichung zur Beschreibung von S berechnet, und zwar auf einem 256×256 Zellen großen Gitter. Der Term $\nabla^2 S$ wurde als Abweichung einer Zelle vom Mittelwert ihrer 8er-Nachbarschaft genähert und der Gradient richtungsweise mit dem Sobeloperator. Die

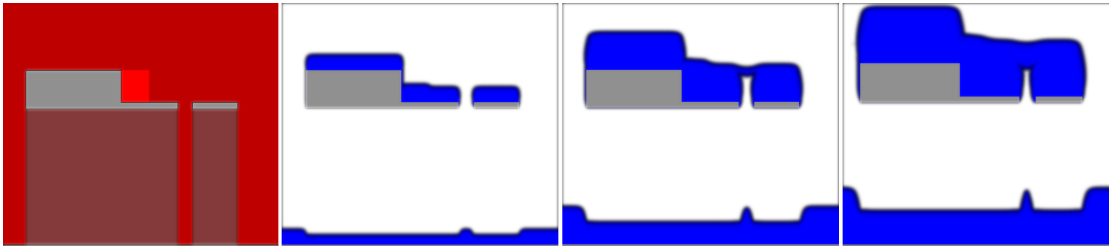


Abbildung 6.2.: Ein zweidimensionales Reaktionsdiffusionssystem als Monte-Carlo-Simulation angepasst auf Schnee nach Gl. (6.17). Links: Grau der Szenenuntergrund, in Rot die Schneefalldichten $\rho = 0, 75, 1$ und $0,5$; Rechts: Entwicklung der Schneefalldichte S in Blaustufen. 100 Simulationsschritte auf 256×256 Zellen.

zeitlichen Zuwächse ΔS pro Zelle wurden als prozentuales Wachstum interpretiert, um die Normierung von S auf das Intervall $[0..1]$ zu erhalten. Insgesamt entspricht diese Vorgehensweise einer vereinfachten Monte-Carlo-Simulation. Man erkennt die Möglichkeit der Brücken- und Überhangsbildung, und auch die Glättung der bedeckten Geometrie. Bis auf die Möglichkeit der sukzessiven Schneekompaktifizierung z. B. per Rückreaktion und die der Schneeuumlagerung sind in diesem Schema alle Schneeakkumulationsformen ausdrückbar.

6.3. Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Es ist formal möglich, die Gesamtheit aller Erscheinungen der Schneeakkumulation in einem Gleichungssystem auszudrücken (6.1 f.). Trotz des geringen praktischen Nutzens der Gesamtdarstellung lassen sich verwertbare Näherungen aus ihr gewinnen. Dazu gehört auch der statistische Übergang zu Einteilchenflüssen nach dem Vorbild der Boltzmann-Gleichung (6.8 f.). Die Formalisierung der Schneeakkumulation wird erschwert durch den Dichtesprung, der sich an der Schneeoberfläche, d.h. am Übergang von freiem Schneefall zu abgelagertem Schnee ereignet. Auf visueller Skala ist der Sprung nicht stetig, so dass

es sich um einen Phasenübergang handelt. Konsistente Herleitung der Phasenfront aus der mikroskopischen Struktur bleibt daher vermutlich auch in Zukunft eine mathematische Unmöglichkeit. Stattdessen bieten sich zwei makroskopische Modellierungsweisen an, die die mikroskopische Theorie näherungsweise als äußeres Treiben verwenden. Die Schneeoberfläche lässt sich lokal als getriebenes Höhenfeld mit der Edwards-Wilkinson-(6.12) oder der KPZ-Gleichung (6.14) beschreiben, wobei auch die fraktale Struktur der Schneeoberfläche abgebildet wird, aber nicht Schneeüberhänge oder Brücken. Die vollständige dreidimensionale Form von Schneekörpern auf visueller Skala lässt sich mit einem anisotropen Reaktionsdiffusionssystem (6.17 f.) darstellen. Die mikroskopische Theorie muss dazu die Verteilung der Schneefallstärke J als Substrat bereitstellen, das Reaktionsprodukt ist die Dichte S des gefallenen Schnees. Die Schneeoberfläche fällt in etwa mit den Orten der stärksten Änderung in S zusammen. Diese Beschreibung ist analytisch nicht beherrschbar, in numerischen Simulationen zeigt sich aber, dass alle Schneeformen auf visueller Skala über die Anfangsverteilung von J , S und der Anisotropie in (6.17) darstellbar sind. Einzig gravitative Spätwirkungen wie Kompaktifizierung und nachträgliche Mikrolawinen bleiben unberücksichtigt.

Aus der systematischen ex ovo Betrachtung der Schneeakkumulation bleiben drei Punkte für die computergraphische Verwertung festzuhalten:

1. Die Massenverteilung des gefallenen Schnees ergibt sich aus der Schneefallverteilung, die in erster Linie eine Funktion der Szenengeometrie und der vertikalen Verdeckung ist,
2. die lokale Form der Schneeoberfläche lässt sich näherungsweise als Schneehöhenfeld angeben und
3. an der mathematischen Beschreibung der Oberflächenform ist grundsätzlich ein Diffusionsterm beteiligt.

Der nächste Schritt ist die genaue Untersuchung der Eigenschaften des Diffusionstermes.

7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen

Diffusion ist in der Natur ein weitverbreitetes Phänomen. Die voranstehenden Untersuchungen zeigten, dass Diffusionsprozesse auch bei der Schneeakkumulation eine Rolle spielen. Die folgenden Abschnitte liefern eine detaillierte Beschreibung der physikalischen Hintergründe und der mathematischen Behandlung der Diffusion.

7.1. Das physikalische Prinzip der Diffusion

Die merkwürdigste Eigenschaft von Diffusionsprozessen ist ihr gleichförmiges Verhalten in radikal unterschiedlichen Regimes. Ob es sich um Wärmeleitung, viskosen Grenzschichten in Fluiden oder die Lösung von chemischen Substanzen handelt: immer wieder taucht die gleiche Form auf. Senkrecht zu starken Gefällen kommt es zu Material- oder Eigenschaftsflüssen, so dass das Gefälle vermindert wird. Der konkrete Inhalt des Transportstromes erscheint irrelevant für die Form. Offenbar ist die Diffusion ein makroskopisches Prinzip, das sich nicht aus den mikroskopischen Eigenschaften der beteiligten Teilchen ergibt. Wie kommt es zu dieser universellen Form?

7.1.1. Grundlagen

Es gibt eine noch grundlegendere Eigenschaft von Vielteilchensystemen auf makroskopischer Ebene, die indirekt auch die Diffusion bewirkt. Wenn Partikelindividuen eines Systems nicht mehr einzeln auflösbar sind und man stattdessen nur noch gemittelte Eigenschaften beobachten kann, dann zeigt sich, dass über lange Zeitskalen und ohne äußeren Antrieb wahrscheinlichere Zustände häufiger auftreten. Oberflächlich besehen handelt es sich um eine Trivialität, bei genauerer Betrachtung bietet der makroskopische Trend zum Wahrscheinlichsten jedoch eine verwertbare Präzisierungsmöglichkeit. Allen isolierbaren und dennoch unvollständig kontrollierbaren Systemen eignet eine zeitliche Entwicklungsrichtung, die ohne Energiezufuhr unumkehrbar ist: nur wahrscheinlichere Zustände werden von selbst erreicht. Mikroskopisch ist dies quantifiziert durch den Wandel der Entropie S , die sich proportional zum Logarithmus der Wahrscheinlichkeit W eines Zustandes als

$$S \propto \ln W \quad (7.1)$$

schreiben lässt. Die Formulierung gewinnt einen nicht-formalen Sinn, wenn man ein makroskopisches Ensemble angibt, dessen Konfiguration die Zuordnung einer Wahrscheinlichkeit W ermöglicht. Der absolute Wert der Entropie ist eine Frage des Blickwinkels

7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen

und des Beobachtungshorizontes, aber keinesfalls universell oder eindeutig. Eine seltsame Konsequenz dieser Wahlfreiheit ist die Bedeutungslosigkeit der Entropie bei sehr genauer Beobachtung oder starker Einschränkung des Horizontes. Die Proportionalität in (7.1) wird in der Physik durch die Boltzmann-Konstante k_B bestimmt, mit dem Faktor $(1/\ln 2)$ erhält man den Shannon'schen Informationsgehalt. In unkontrollierten Systemen wächst die Entropie im Mittel, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines Systemzustandes kann ohne äußere Manipulation nur zunehmen¹.

Der diffusive Transport wird mit diesem Hintergrund plausibel. Kanten oder starke Gefälle bedeuten große Ordnung oder geringe Konfigurationsfreiheit. Unkontrolliert bauen sich diese Gefälle ab, unabhängig von der mikroskopischen Struktur². Gefälle lassen sich mathematisch als Konzentrationsgradienten ausdrücken. Das bekannte erste Fick'sche Gesetz beinhaltet den Zusammenhang zwischen Konzentrationsgefälle und Teilchenstrom \vec{j}

$$\vec{j} = -D\nabla\rho. \quad (7.2)$$

Der Vorfaktor D gibt die Transporteffizienz an, das Minuszeichen zeigt an, dass der Transport entgegen der Gradientenrichtung erfolgt. Wenn man nicht an vektoriellen Transportgrößen interessiert ist, sondern nur an der Entwicklung der Partikeldichte ρ , dann hilft das zweite Fick'sche Gesetz. Es besagt, dass die Konzentrationsänderung der Divergenz des Teilchenstromes entspricht, also

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} = D\nabla^2\rho. \quad (7.3)$$

Dies stellt wieder eine Kontinuitätsgleichung der Form (3.3) dar, und es ist gleichzeitig die Grundform aller Diffusionsgleichungen.

7.1.2. Diffusion auf Höhenfeldern

Für die Darstellung von Schneeoberflächen wurde in den vorangegangenen Kapiteln die lokale Höhenfelddescription als Möglichkeit angeführt. Der Diffusionsterm in der Gleichung der Oberflächenentwicklung (6.12) und (6.14) ist im Prinzip auch auf das natürliche Streben nach Ausgewogenheit der Wahrscheinlichkeit zurückzuführen. Die Entropie ist in einem Höhenfeld nur in der Varianz, d.h. in der Schwankungsbreite der Höhe definierbar. Wenn man das Wachstum des Höhenfeldes auf Partikel zurückführt, wie es bei Schnee geschieht und implizit auch im stochastischen Term der Edwards-Wilkenson- und der KPZ-Gleichung, dann ergibt sich eine nützliche und anschauliche Interpretationsmöglichkeit des Diffusionsterms.

Jedes Partikel vergrößert die Höhe genau dort, wo es landet, d.h. es erzeugt lokal einen positiven Ausreißer der Höhe. Die Diffusion tilgt den Ausreißer wieder, so dass das Partikel faktisch umgelagert wird. Die Details der Umlagerung sind nicht explizit sichtbar

¹Merkwürdigerweise ist dies mikroskopisch unbeweisbar. Jede mikroskopische Lösung einer Bewegungsgleichung hat eine korrespondierende Lösung in entgegengesetzter Richtung, weil die Hamiltonfunktion symmetrisch in t ist. Die Entropieänderung unterscheidet sich dabei nur im Vorzeichen, nicht aber im Betrag. Der genaue Beweis von Johann Loschmidt dafür in [Los76] während seines Streits mit Ludwig Boltzmann.

²Exakt sogar nur dann, wenn die genaue Struktur nicht beobachtbar ist.

im Diffusionsterm, wohl aber deren Ergebnis. Was kann auf mikroskopischer Ebene die Ursache für den Transport sein? Mit Sicherheit wird ein Partikel nicht grundsätzlich an der Stelle haften bleiben, an der es gelandet ist. Stattdessen wird es rollend, springend oder rutschend seinen Platz freigeben und schließlich an anderem Ort zur Ruhe kommen. Wenn man Schneeflocken betrachtet, dann treten außerdem noch Deformationen, Brüche und Schmelzvorgänge zu den Bewegungsmöglichkeiten. Man kann annehmen, dass es insgesamt eine große Anzahl n von mikroskopischen Transportwegen t_i gibt, die alle eine charakteristische, endliche Transportweite σ_i^2 besitzen. Da die Diffusion auf der Mittelung der mikroskopischen Vorgänge beruht, liegt es nahe, die statistischen Eigenschaften aller Transporte zu betrachten. Die schwächste sinnvolle Annahme über die t_i besteht darin, pro Transportart von einer beliebigen Weitenverteilung $p_i(x)$ auszugehen, die einzig durch eine endliche Streuung und einen verschwindenden Mittelwert gegeben ist. Mathematisch bedeutet dies das Verschwinden des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_i(x) dx = 0. \quad (7.4)$$

und die Konvergenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_i(x) dx = \sigma_i^2 < \infty. \quad (7.5)$$

Wenn man akzeptiert, dass die Schneeflocken einer unbekannten Anzahl N unabhängiger lokaler Umlagerungen ausgesetzt sind, dann kann man den zentralen Grenzwertsatz heranziehen³. Er besagt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Ereignissen der Form t_i gegen eine Normalverteilung konvergiert, sofern die Verteilungen p_i nicht zu unterschiedlich sind. Die Breite σ_N^2 der Normalverteilung hängt offensichtlich von den Varianzen σ_i^2 der Summanden ab. Für identische p_i mit $\sigma_i = 1$ erhält man eine mittlere Gesamtstreuung von

$$\sigma_n^2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}. \quad (7.6)$$

Dieser Ausdruck konvergiert offensichtlich gegen \sqrt{n} , so dass die Summe der Transportstrecken für $n \rightarrow \infty$ exakt der Normalverteilung $N(0, 1)$ folgt, wenn man alle Varianzen mit $1/\sqrt{n}$ normiert.

Es gibt einige Abschwächungen der strengen Form des zentralen Grenzwertsatzes, die alle im Wesentlichen darauf hinauslaufen, dass auch leicht unterschiedliche Verteilungen von p_i noch in der Summe eine exakte Normalverteilung ergeben. Im Folgenden wird dies als Näherung für die Schneeflockenumlagerungsvorgänge angenommen.

Zusammengefasst heißt das: durch die Diffusion wird jedes Partikel des Höhenfeldes asymptotisch gemäß einer Normalverteilung ausgebreitet. Analytisch entspricht das einer Faltung des Höhenfeldes mit einem Gaußkern. Genau dies ist auch der allgemeine Lösungsansatz für Diffusionsgleichungen aller Art, wie im Folgenden zu zeigen ist.

Die Faltung mit dem Gaußkern stellt für die Schneeoberflächenenerzeugung die erste Näherung dar, indem sie die asymptotisch wirksamen lokalen Umlagerungen enthält.

³Dieser Ansatz ist eine idealisierte Näherung, da insbesondere die Unabhängigkeit der Transportprozesse nicht grundsätzlich gegeben ist.

7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen

Die Simulation des Diffusionstermes kann also als das makroskopische Grundgerüst der Schneegeometrieerzeugung verwendet werden. Der Unterschied zur sonst üblichen Anwendung der Edward-Wilkinson Gleichung besteht darin, die Diffusion als so stark anzunehmen, dass der stochastische Antrieb wie ein kontinuierliches Wachstum wirkt.

Alle weiteren Eigenschaften der Schneeoberfläche können dann als mikroskopische Fluktuationen aufgefasst werden⁴. Genau wie bei der Skalentrennung in der Atmosphärenphysik werden die kleinskaligen, turbulenten Anteile im Nachhinein auf das mittlere Ergebnis addiert. Beim Schnee gehört dazu beispielsweise die Rauigkeit der Schneeoberfläche. Sie wird erst zur Visualisierung als Textur auf den Schnee projiziert (siehe Kapitel 9).

7.2. Mathematische Behandlung linearer Diffusionsgleichungen

Diffusionsgleichungen gehören zur Gruppe der parabolischen Differentialgleichungen. Gleichungen dieses Typs treten sowohl in der Natur als auch in der Technik häufig auf, es gibt daher umfangreiche Arbeiten zu allgemeinen und speziellen Lösungsstrategien. Das Grundprinzip zur Lösungskonstruktion für Diffusionsgleichungen lässt sich mit der Partikelinterpretation nachvollziehen: eine Anfangsbedingung $h(t = 0, x)$ wird gefaltet mit einem Gaußkern $G(x, x', t)$. Die vollständige Konstruktionsvorschrift nach [Itô92] ist im Folgenden für zwei Raumdimensionen skizziert. Die Notation folgt weitgehend [Itô92]. Im Anschluss wird außerdem ein explizites Lösungsbeispiel für eine Raumdimension berechnet. Die Verallgemeinerung auf mehrere Raumdimensionen fehlt hier und bedarf keiner qualitativen Änderungen; sie wird ausführlich z.B. in [Itô92] behandelt.

7.2.1. Konstruktion von allgemeinen Lösungen mittels Fundamentallösung

In zwei Raumdimensionen kann man die Partikelkonzentration $\rho \in \mathbb{R}$ direkt in ein Höhenfeld übertragen, indem man $\rho \equiv h$ setzt. Das Höhenfeld $h(t, x)$ hängt von der Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ und vom Ort $x(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ab. Zur Diskussion stehen nun inhomogene, lineare Diffusionsgleichungen der Form

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = \nabla^2 h(t, x) + j(t, x). \quad (7.7)$$

Die Inhomogenität $j(t, x)$ steht für die Schneefallrate, allerdings stetig und kontinuierlich und nicht stochastisch wie in (6.12), da es hier nur um das makroskopische Grundgerüst der Schneeform geht. Es sei Ω das Definitionsgebiet von (7.7), und $\partial\Omega$ der Rand. Die Anfangsbedingung sei mit $h_0(x) = h(t_0, x)$ bezeichnet. Fundamentallösungen $U(t, x, t_0, y)$ sind dadurch gekennzeichnet, dass sie bei Faltung mit den Anfangsbedingungen eine Lösung der Ausgangsgleichung ergeben, dass also

$$h(t, x) = \int_{\Omega} U(t, x, t_0, y) h_0(y) dy$$

eine Lösung von (7.7) ist mit $\delta_t h - \nabla^2 h(t, x) - j(t, x) = 0$.

⁴Weitreichende Korrelationen wie Wind sowie Umkristallisation bleiben außerdem unberücksichtigt.

Allgemeine Lösung ohne Rand

Zunächst wird der Fall $\Omega = \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega = \emptyset$ betrachtet, also ohne Rand. Durch Einsetzen in (7.7), kann man leicht zeigen, dass der Gaußkern

$$G(t, x, t_0, y) = \frac{1}{2\pi(t - t_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-t_0)}} \quad (7.8)$$

für $j = 0$ die Fundamentallösung ist. Für allgemeine $j \neq 0$ ergibt sich die Lösung durch Addition der gefalteten Inhomogenität nach

$$h(t, x) = \int_{\Omega} G(t, x, t_0, y) h_0(y) dy + \int_0^t \int_{\Omega} G(t, x, \tau, y) j(\tau, y) dy d\tau. \quad (7.9)$$

Allgemeine Lösung mit Rand

Für berandete Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ taugt der einfache Gaußkern nicht mehr zur Fundamentallösung. Eindeutig ist die Lage, wenn man den Rand eines Halbraumes einer Dimension betrachtet, also beispielsweise alle x mit $x_1 = 0$. Dort gibt es die zwei üblichen Möglichkeiten der Randbedingungen, nämlich *Dirichlet* mit $h(x(0, x_2), t) = 0$ und *Neumann* mit $\partial_{x_1} h(x(0, x_2), t) = 0$ (sowie evtl. deren kontinuierlichen Kombinationen). Man kann leicht zeigen, dass die gespiegelten Gaußkern-Überlagerungen der Form

$$G^0(t, x, t_0, y) = G(t, x, t_0, y(y_1, y_2)) + G(t, x, t_0, y'(-y_1, y_2)) \quad (7.10)$$

und

$$G^1(t, x, t_0, y) = G(t, x, t_0, y(y_1, y_2)) - G(t, x, t_0, y'(-y_1, y_2)) \quad (7.11)$$

die Neumann- bzw. Dirichlet-Randbedingung bei $x_1 = 0$ erfüllen und außerdem Lösungen für (7.7) liefern. Das zu lösende Problem liegt nun darin, Fundamentallösungen für allgemein zusammengesetzte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zu konstruieren. Prinzipiell behilft man sich in [Itô92] mit dem Trick der *Teilung der Eins*: Man definiert für jede Randpartie eine lokal exakte Fundamentallösung $g_{\nu}(t, x, t_0, y)$ nach dem Muster (7.11) und (7.10), und überlagert sie mit Hilfe einer Funktionenschar $\omega_{\nu}(x)$. Die wichtigste Eigenschaft dieser Schar ist ihre quadratische Aufsummierbarkeit zu 1 auf dem gesamten Definitionsraum, d.h.

$$\sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu}(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \{\Omega \cup \partial\Omega\}. \quad (7.12)$$

Leider liefern die so überlagerten Fundamentallösungen keine exakten Lösungen mehr. Stattdessen erhält man einen Näherungsanfang $H(t, x, t_0, y)$ der Fundamentallösung als

$$H(t, x, t_0, y) = \sum_{\nu=1}^n \omega_{\nu}(x)^2 g_{\nu}(t, x, t_0, y). \quad (7.13)$$

Den Fehler, den man mit H als Fundamentallösung begeht, sei mit $J_0(t, x, t_0, y)$ bezeichnet, also

$$J_0(t, x, t_0, y) = \frac{\partial H(t, x, t_0, y)}{\partial t} - \nabla^2 H(t, x, t_0, y) - j(t, x). \quad (7.14)$$

7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen

Damit kann man eine Reihe

$$J_i(t, x, t_0, y) = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} J_0(t, x, t_0, z) J_{i-1}(\tau, z, t_0, y) dz d\tau \quad (7.15)$$

definieren, die gegen

$$K(t, x, t_0, y) = \sum_{i=0}^{\infty} J_i(t, x, t_0, y). \quad (7.16)$$

konvergiert. Damit kann man die fertige Fundamentallösung aufschreiben als

$$U(t, x, t_0, y) = H(t, x, t_0, y) + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} H(t, x, \tau, z) K(\tau, z, t_0, y) dz d\tau. \quad (7.17)$$

Es handelt sich um eine Konstruktionsvorschrift, die grundsätzlich eine Lösung liefert, wenn die genauen Voraussetzungen aus [Itô92] eingehalten sind. Im folgenden Beispiel sind zum Abschluss der mathematischen Betrachtungen zwei explizite Berechnungsbeispiele durchgeführt.

7.3. Analytische Lösungsbeispiele

Die Grundform eines Schneeprofiles auf einem zweiseitig begrenzten Abschnitt auf der x-Achse lässt sich analytisch berechnen. Dabei gibt es allerdings einen schnelleren Rechenweg als den systematische Zugang des vorangegangenen Abschnittes. Er beruht auf der Laplace-Transformation. Die Laplace-Transformation ist definiert als

$$F(s) := \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (7.18)$$

Die Variable t wird transformiert zur komplexen Variable s . Die entscheidende Eigenschaft der Laplace-Transformation ist ihre Wirkung auf Differentiale: sie werden in Multiplikationen überführt. So wird aus der partiellen Differentialgleichung (7.7) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die transformierte Gleichung lautet

$$\tilde{h}(s, x) = \frac{1}{s} D \nabla^2 \tilde{h} + \frac{j}{s^2}. \quad (7.19)$$

Für diese inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man eine spezielle Lösung berechnen, z.B. unter Zuhilfenahme der Lösungsskizzen in [Leh08]. Dabei geht man nach den Techniken der Variablenseparation und der Variation der Konstanten vor. Für die Randbedingung $\tilde{h}(s, 0) = \tilde{h}(s, L) = 0$, d. h. für die Lösung auf einem beschneiten Streckenabschnitt $[0..L]$ erhält man im Laplaceraum die Lösung

$$\tilde{h}(s, x) = \frac{j}{s^2} \left[1 - e^{x\sqrt{s}} + \frac{e^{L\sqrt{s}} \sinh(x\sqrt{s}) - \sinh(x\sqrt{s})}{\sinh(L\sqrt{s})} \right], \quad (7.20)$$

wobei zur Übersichtlichkeit $D = 1$ gesetzt ist. Die Rücktransformation in den Zeitraum bedarf einigen Rechenaufwands. Sie beruht auf der Lösung des Rücktransformationintegrals

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{const-i\infty}^{const+i\infty} F(s) e^{st} dt \quad (7.21)$$

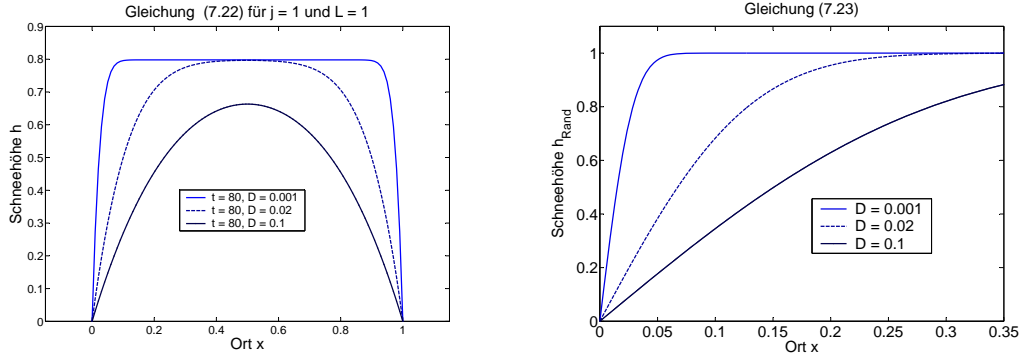


Abbildung 7.1.: Mathematische Lösungskurven für das Schneerandprofil nach den Gl. (7.22) und (7.23). Zum Vergleich siehe ein reales Schneerandprofil in Abb. 4.3.

unter Verwendung des Residuensatzes. Mit zweifacher Anwendung des Faltungstheorems und der Tabelle 6.36 aus [Leh08] für $s < 0$ und $x > 0$ erhält man schließlich

$$h(t, x) = jt \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\pi n}{L} \int_0^t d\tau \sin\left(\frac{n\pi x}{L\sqrt{D}}\right) \tau \left(e^{-\frac{n^2\pi^2\tau}{L^2}} + \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} d\tau' \frac{1}{\sqrt{\tau'^3}} e^{-\frac{L^2}{4\tau'} - \tau' \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \right). \quad (7.22)$$

Die Randsteilheit steckt in j und in der Zeitskala. Implizit ist beides durch das Verhältnis von Diffusionskonstante und Schneefallstärke j ausgedrückt. In Abb. 7.1 sind einige Lösungskurven approximiert dargestellt.

Eine ähnliche Randprofilform ergibt sich für einen einfachen Spezialfall auch aus der systematischen Konstruktion aus Kapitel 7.2.1. Sie hat den Vorteil, dass sie sehr viel anschaulicher ist als das Ergebnis (7.22), und trotzdem die Form des Randprofils von frisch gefallenem Schnee zeigt, wie es z.B. in Abbildung 4.3 zu sehen ist. Mathematisch gesehen ist eine Randkante die Grenze eines Halbraums. Für eine Dimension kann man die Form der Fundamentallösung angeben. Bei der Randbedingung eines 1D-Halbraumes kann man außerdem auf die Superposition aus (7.12) verzichten. Stattdessen kann man direkt den Dirichlet-Gaußkern (7.11) als Fundamentallösung in (7.9) einsetzen. Als prinzipielle Lösungsform erhält man

$$h(t, x)_{\text{Rand}} \propto \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right), \quad (7.23)$$

wobei $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x'^2} dx'$ die Gauß'sche Fehlerfunktion (engl. *error function*) darstellt. Die genaue Skalierung hängt von der Diffusionskonstante D , von der Schneefallstärke und vom betrachteten Zeitpunkt ab. Abbildung 7.1 zeigt links die Form des Randprofils für den gleichen Zeitpunkt $t = 1$, die Schneefallstärke $j = 1$ und verschiedene Diffusionskonstanten. Die Diffusionskonstante ist wie gehabt das Maß für die Steilheit des Randprofils. Das monomische Argument x der Error-Funktion in (7.23)

7. Eigenschaften und Lösungen von Diffusionsgleichungen

ergibt sich aus einem Polynom zweiten Grades, nämlich $|x - y|^2$ (aus Gl. (7.8)). Das exakte Argument von (7.23) ist also etwas komplizierter. Da sich aber jeder Term der Form $ax^2 + bx + c$ (wie auch $|x - y|^2$) per linearer Koordinatentransformation in die Form \tilde{x}^2 bringen lässt, ist die prinzipielle Form (7.23) korrekt. Bei der Faltung ist nur die quadratische Grundform in den Exponentialfunktionen von (7.11) wesentlich, alles andere führt nur zu Verschiebungen⁵, und gerade die werden durch die beiden Summanden in (7.11) verhindert. Daher stellt (7.23) die allgemeine Form nicht überhängender Schneerandprofile dar. Die vertikale Skalierung ist offenbar nur proportional von der Schneefallintensität und dem betrachteten Zeitpunkt abhängig.

Neben den analytischen Lösungsmethoden existieren einige numerische Approximationsmethoden wie z.B. in [BS92] dargestellt. Sie spielen im Zusammenhang dieser Arbeit aber keine Rolle. Als entscheidende Erkenntnis bleibt festzuhalten, dass der Diffusionsprozess grundsätzlich einer Faltung mit einer Gaußverteilung entspricht.

⁵Anschaulich kann man dieses Argument verstehen als Variante des Sachverhaltes, dass Parabeln von der Form her unverzerzte Parabeln bleiben, auch wenn sie eine lineare Funktionen aufaddiert bekommen.

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

Nach der systematischen Einordnung der Schneemodellierung in die Computergraphik und der physikalischen Untersuchung des Schnees auf visuellen Skalen liegen nun alle Bestandteile für die computergraphische Schneemodellierung bereit. Alle in dieser Arbeit entwickelten Verfahren behandeln dabei Geometrieerzeugung und Visualisierung getrennt. Einerseits entspricht dies der üblichen Vorgehensweise in der Computergraphik, andererseits passt es auch sehr gut zum Skalenverhalten des Schnees. Alle chaotisch-turbulenten und mikroskopischen Anteile werden nur in der Visualisierung modelliert, während die regulären makroskopischen Anteile in der Grundform der Schneebedeckungsgeometrie enthalten sind.

Im Folgenden wird die Erzeugung der Schneegeometrie dargestellt. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, zunächst nur den Vertikalteil der Schneebedeckung zu betrachten. Wie in Kapitel 6 dargelegt, kann man die Schneedecke dann als Höhenfeld behandeln. Das Höhenfeld erlaubt es, die Schneeakkumulation mit einem Diffusionsprozess zu approximieren, deren hohe Berechnungslokalität effiziente Algorithmik ermöglicht. Die visuell eindrucksvollen, aber seltenen horizontal ausgreifenden Schneedeckenanteile wie Überhänge und Brücken lassen sich im Nachhinein hinzufügen. Das Grundmodell der diffusiven Schneedeckenerzeugung Diffusion wird in Abschnitt 8.1 dargestellt. Dort werden auch alle Modellannahmen mit Verweisen auf die Beobachtungssammlung im Anhang A belegt. Nach einer Erläuterung der verwendeten Datenstrukturen (Abschnitt 8.2) werden zwei Arten der Schneehöhenfelderzeugung beschrieben (Abschnitte 8.3 und 8.4), und dann zur Vollendung die Erweiterung des Schneehöhenfeldes zur Darstellung von Brücken und Überhängen (Abschnitt 8.5) beschrieben.

Es sei auch darauf hingewiesen, dass die Verwendung der Diffusion zur Geometrieerzeugung eine Neuheit innerhalb der Computergraphik ist. Es erschienen zwar schon einige Arbeiten, die sich die Eigenschaften der Diffusion zu Nutze machten, der Schwerpunkt lag dort aber auf anderen Aspekten. Diffusion wurde bereits verwendet zur Texturierung per Reaktionsdiffusionsprozess [Tur91] oder im Rahmen statistisch motivierter Texturerzeugung [LGG⁺07]. Auch zur Geometrieglättung wurde der Diffusions- oder Laplace-Operator Δ (bzw. ∇^2) ausführlich verwendet (z. B. [DMSB00]). Ähnlich wurden auf Bildbasis einige diffusionsgestützte Rendertechniken entwickelt, die auf den Glättungseigenschaften des Laplace-Operators beruhten. Dazu gehören sowohl fotorealistische Lichtverteilungsverfahren (z.B. [DJ05]) als auch nicht-fotorealistische Zeichentechniken (z.B. [OBW⁺08]).

8.1. Faltung als Grundprinzip der diffusiven Schneedeckenerzeugung

Das Grundprinzip der Schneedeckenerzeugung in dieser Arbeit lautet: Es werden nicht einzelne Schneeflocken betrachtet, sondern nur das statistische Verhalten sehr vieler Schneeflocken. Das Akkumulationsverhalten der Schneeflockengesamtheit ist einfach modellierbar, wenn die Annahme gilt, dass alle Schneeflocken nach der Landung lokal gemäß einer Normalverteilung umgelagert werden. Die Plausibilität dieser Annahme wurde in den Kapiteln 6 und 7 ausführlich erörtert. Nach den theoretischen Argumenten folgen nun empirische Belege für die Zulässigkeit der Annahme. Gleichzeitig stellen sie einen Katalog von Soll-Kriterien an das Schneeverteilungsmodell dar.

Wie oben gezeigt, ist ein Diffusionsprozess die Faltung einer Anfangsverteilung einer Größe mit einem Gaußkern. Auf den Schnee übertragen heißt das: Man beginnt mit einer gedachten Anfangsschneeverteilung, bei der alle Schneeflocken exakt an dem Ort bleiben, an dem sie gelandet sind¹. Die Oberfläche, die aus dieser Verteilung entsteht, ist nichts anderes als eine vertikal verschobene Kopie der Oberseiten der beschneiten Szene. Aus der neuen Oberfläche erhält man dann per diffusiver Umverteilung, d.h. per Faltung mit einem Gaußkern ein realistisches Bild der Schneeoberfläche. Für einfache Verhältnisse kann man dann das Lösungsprinzip direkt wie in 7.2.1 beschrieben verwenden.

Abbildung 8.1 zeigt die Anwendung des Dirichlet-Gaußkernes (7.11) für eine einseitig begrenzte Fläche. Die Gültigkeit des Diffusionsansatzes wird durch das Foto der Abbildung außerdem durch ein weiteres Detail belegt: Die Schneehöhe nimmt zur Tischmitte hin nicht genau wie die Fehlerfunktion zu, sondern noch etwas stärker. Dies ist bedingt durch die Rotationssymmetrie des Tisches. Der maximal mögliche Radius eines vollständig aufliegenden Gaußkernes nimmt zur Tischmitte zu. Eine weitere Ansicht verdeutlicht den Sachverhalt. Abbildung 8.2 zeigt ebene beschneite Flächen, die kleiner als der Gaußkern sind. Folgerichtig ist die maximale Schneehöhe eines zusammenhängenden Schneekörpers vermindert. Auch in diesem Fall liefert die mathematische Theorie aus Abschnitt 7.2.1 eine exakte Lösung. Diese Befunde und weitere Beobachtungen aus Anhang A.1 zeigen unmissverständlich, dass es bei Schnee auf visueller Skala keinen maximalen Böschungswinkel gibt - entgegen den Annahmen bisheriger computergraphischer Schneemodelle (z.B. [Fea00a]).

Mit einigen wenigen Verallgemeinerungen lassen sich mit dem Faltungsprinzip auch alle anderen Formen windfreien und ungealterten Schnees erklären. In Abbildung 8.3 ist die Anpassung für vertikale Verdeckung dargestellt.

Die Schneehöhe ergibt sich wieder aus der Summe über den gestützten Gaußkern. Die vertikal verdeckten Teile werden nun nicht wie am Rand negativ verrechnet, sondern als Null. So entsteht im verdeckten Teil ein Schneeoberflächenprofil, das der vollen Error-Funktion entspricht, und nicht nur dem Teil für $x \leq 0$ wie am Rand. Die Bilder im Anhang A.2 zeigen weiterhin, dass der freie Raum oberhalb verdeckter Flächenteile einen Einfluss auf die Steilheit des Verdeckungsprofils haben: Je größer der freie Raum, desto langsamer die Schneehöhenabnahme mit dem Grad der Verdeckung.

¹Unter vorläufiger Vernachlässigung vertikaler Verdeckung.



Abbildung 8.1.: Die Beschneieung einer glatten, unverdeckten und einseitig begrenzten Fläche lässt sich in sehr guter Näherung als diffusives Wachstum beschreiben und mathematisch als Faltung mit einem Gaußkern ausführen, der die Randbedingungen einhält (siehe 7.2.1 und Gl. (7.11)). Schneehöhe im Foto rechts ca. 10 cm aus Neuschnee. Weitere Beispiel in Anhang A.1

Auch das Aussehen der Schneeformen auf rauem Untergrund und unterhalb von Rändern kann man im Rahmen diffusiver Faltung berechnen. Wie oben angegeben geht man von der gedacht versetzten ursprünglichen Oberfläche aus. Wenn die Oberflächenrauigkeit kleiner als die maximale Schneehöhe ist, dann ist die diffusive Faltung eindeutig definiert. Diese Situation ist in Abbildung 8.4 links skizziert und rechts oben mit einem Foto belegt. Die Schneeoberfläche ist ein geglättetes Abbild des Untergrundes. Große Untergrundsprünge bleiben nach der Glättung erhalten, wie in Abb. 8.4 außerdem dargestellt ist. Mit zunehmender Schneehöhe geht der Schneehöhensprung jedoch kontinuierlich in die Glättung über (siehe auch Anhang A.4), in Form von sogenannten Innenrändern. Um diese Eigenschaft im Diffusionskern unterzubringen, bedarf es einer Erweiterung der Faltungskerngewichte. In Abschnitt 8.4 ist beschrieben, wie sich sowohl die Einhaltung der Außenrandbedingungen als auch Glättung und Innenränder in einer Kerndefinition unterbringen lassen.

Die letzte wesentliche Erscheinung in Schneebedeckungen, die sich durch den Diffusionsansatz erklären und modellieren lässt, ist die Brückenbildung. Schneebrücken bilden sich, wenn zwei Untergrundpartien durch einen im Vergleich zur Schneehöhe kleinen Spalt getrennt beschneit werden. Ab einer bestimmten Schneehöhe bildet sich statt zweier Außenränder neuer Untergrund, dessen Unebenheit in der Folge von neuem Schnee geglättet wird. Dabei geraten die beiden grundlegenden Diffusionskernaufgaben - Glättung und Randbedingungseinhaltung - in Widerspruch. Eine geschickte Ausnutzung der Datenstrukturen, mit denen die Schneehöhen im Folgenden berechnet werden, erlaubt, diesen Widerspruch zumindest visuell befriedigend zu lösen. Die genaue Vorgehensweise

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

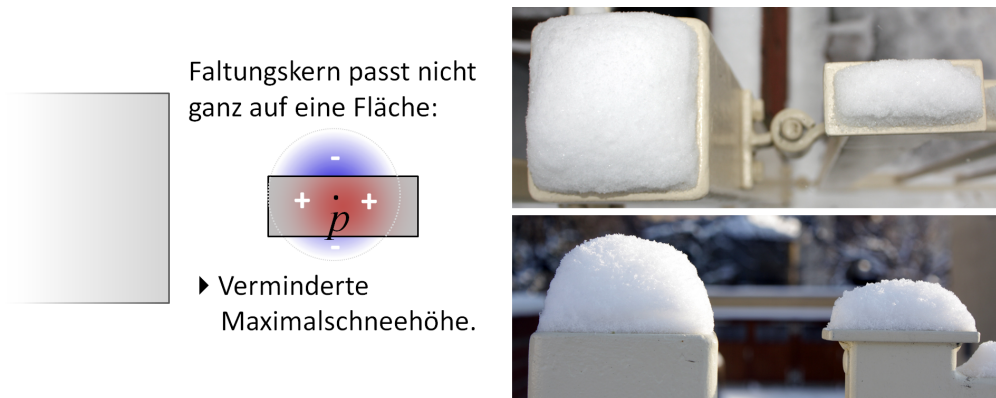


Abbildung 8.2.: Der Diffusionsansatz erklärt die Verminderung der Maximalschneehöhe auf sehr kleinen Grundflächen: Der Gaußkern passt nicht mehr vollständig darauf. Das Foto rechts zeigt die rechte Angel eines Gartentores, mit maximal ca. 10 cm Pulverschnee darauf (Neuschnee, der bei mäßigem Dauerfrost 3 Tage gealtert ist). Weitere Beispiele in Anhang A.3.

ist in Abschnitt 8.5 beschrieben. In Abbildung 8.5 ist rechts ein sehr aussagekräftige Foto zur Verdeutlichung des Brückenbildungsprozesses zu sehen. Großflächige vertikale Verdeckung führte hier zu einem kleinräumigen Gradienten der maximalen Schneehöhe auf regelmäßig gefurchten Untergrund, einem Tisch in diesem Fall.

Man erkennt deutlich, dass die Brückenbildung mit zunehmender Höhe erleichtert wird, im Einzelnen jedoch zufällig einsetzt. Je höher der Schnee, desto wahrscheinlicher bilden sich Brücken. Ab einer bestimmten Schneehöhe verschwinden die Unterteilungen des Untergrundes in der Schneedecke. In Anhang A.5 sind weitere Brückenbeispiele zu sehen. Der Diffusionsansatz eignet sich insofern zur Beschreibung der Brückenbildung, als dass er offenbar ein Maß für die Wechselwirkungsintensität zwischen zwei getrennten Untergrundpartien definiert. Je schmaler der Spalt zwischen den getrennten Partien, desto mehr positive Kernbeiträge erhalten randständige Untergrundpunkte von der jeweils gegenüberliegenden Partie. Gleichzeitig gilt aber die Randbedingung der verschwindenden Schneehöhe direkt am Rand. Konkret für eine einzelne Schneeflocke heißt das: Die Wahrscheinlichkeit, durch den Spalt zu fallen und sich an keiner der beiden Seiten anzulagern sinkt mit der Spaltbreite. Wenn sie sich aber anlagert, dann muss sich im statistischen Mittel durch das vergrößerte Einzugsgebiet am Spaltrand ein anderes Profil ausbilden als an freien Rändern. Die Beobachtungen in Anhang A.5 deuten darauf hin, dass dies in Form von kleinen Überhängen geschieht. Sobald dies einmal erfolgt ist, vereinfacht sich die weitere Brückenbildung. Der Spalt verengt sich, das Einzugsgebiet am Rand vergrößert sich weiter, und die Brückenbildung wird deutlich beschleunigt. Offenbar vollzieht sich dieser Prozess desto häufiger, je mehr Schnee fällt. Abbildung 8.5 zeigt in der Skizze links, dass die Brückenbildung im Mittel als stetige Fortsetzung der diffusiven Faltung über Spalten hinweg aufgefasst werden kann.

Damit ist das Erklärungspotential des Diffusionsansatzes voll ausgeschöpft. Alle wei-



Abbildung 8.3.: Vertikale Verdeckung lässt sich mit dem Diffusionskern ausdrücken, indem nur der unverdeckte Teil des Kernes zur Aufaddierung der Schneehöhe verwendet wird. Im verdeckten Teil entsteht dann ein Schneeprofil, das der vollen Error-Funktion entspricht. Schneehöhe im Foto rechts ca. 7 cm.

teren Erscheinungsformen von Schneeoberflächen auf visueller Skala sind mutmaßlich auf explizit ausgeschlossene Einflussfaktoren zurückzuführen. Dazu gehören in der vermuteten Reihenfolge der Relevanz: Alterung der Schneedecke, d.h. Metamorphoseprozesse aufgrund von interner mechanischer Setzung, Umkristallisation und allmähliches Tauen, windbedingter Umtransport, thermische Unregelmäßigkeiten, d.h. z.B. einseitige Sonneneinstrahlung oder beheizter Untergrund sowie mechanische Reaktion des Untergrundes. In Anhang A.6 und in Abb. 4.5 sind einige der Möglichkeiten angegeben. Deren Modellierung bleibt zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

8.2. Datenstrukturen zur Darstellung von Schneedecken

Mit der obigen Modellvorstellung der diffusiven Faltung ist es möglich, konkrete Implementierungen virtueller Beschneigung zu entwickeln. Voraussetzung ist die Basis einer geeigneten Datenstruktur. Hierfür hat sich die sog. *height span map* nach [ON05] als zweckmäßig erwiesen. Eine Szene wird dabei punktwise aus einer Richtung der Höhe nach abgetastet. Die gesamte Bounding-Box der Szene wird eingeteilt in gitterartig organisierte Höhenspannen, als sog. Höhenspannenkarte bzw. HS-Karte. Jede Höhenspanne enthält nur dort Einträge, wo ein Szenenelement bzw. ein Polygon der Szene geschnitten wird. Abbildung 8.6a zeigt eine Skizze der Höhenspanneneinteilung. Die Einträge in einer Höhenspanne enthalten als Minimum die Höhe des Polygonschnittes, z.B. in Anteilen des Szenendurchmessers in Höhenspannenrichtung. Dies reicht aus für volumetrisch konsistente Szenen, d.h. für polygonale Netze, in denen nur geschlossene Netze mit Vorder- und Rückseiten auftauchen und deren Dreiecksnormalen durchgängig korrekt sind. Daneben kann man pro Höhenspannenübergang weitere Daten vorberechnen, die Vorstufen zur eigentlichen Schneeoberfläche am Ende der Berechnung sind. Für eine Schneestützstelle

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

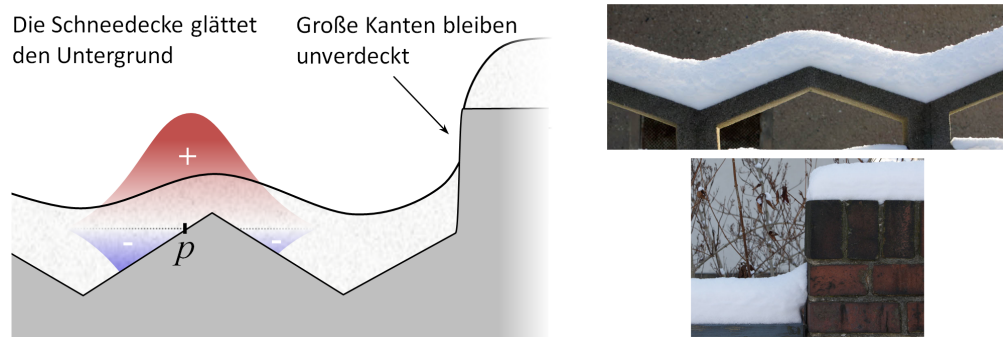


Abbildung 8.4.: Kleinere Untergrundunebenheiten werden durch den Diffusionskern geglättet. Große Sprünge bleiben bei zu geringer Schneehöhe auch in der Schneebedeckung erhalten. Siehe dazu auch Anhang A.4. Maximale Schneehöhe auf den Fotos jeweils ca. 10 cm.

p_{ijk} ist das beispielsweise der freie Raum oberhalb, d.h. die maximale Schneekapazität c_{ijk} , eine Liste der direkten Nachbarn, die Entfernung r_{ijk} zum nächsten Rand und die Position in Weltkoordinaten. Die Unterseiten können dabei unberücksichtigt bleiben. Außerdem bewährte sich eine Liste mit Referenzen auf alle Schneestützstellen.

Die initiale Füllung der HS-Karte erfolgt mittels Ausnutzung des z-Puffers der Graphikkarte. Der z-Puffer wird wiederholt schichtweise in Tiefentexturen d_i ausgelesen, bis keine Fragmente mehr übrig bleiben. Eine ähnliche Technik des Szenensamplings per sog. *depth peeling* verfolgt auch Tokoi [Tok06] zur Schneemodellierung. Hier werden die Tiefentexturen jedoch pixelweise pro Basisgitterpunkt in die HS-Karte übertragen. Abbildung 8.6 zeigt eine Skizze darüber, wie die Höhendaten dabei organisiert sind. Alle weiteren Operationen werden auf der HS-Karten durchgeführt.

Offenbar wirkt sich das gitterweise Szenensampling als Nachteil aus, wenn es um die exakte Reproduktion schräger Ränder in der Schneeoberfläche geht. Der Nachteil wiegt insgesamt jedoch nicht so schwer, wie die Nachteile, die sich aus der direkten Verarbeitung des polygonalen Netzes ergäben. Das z-Puffer-Sampling der Szene weist nämlich drei entscheidende Vorteile auf:

1. das z-Puffer-Sampling ist unabhängig von der Auflösung der beschneiten Szenen, ein Vorteil, der bei Schnee besonders wegen seiner Glättungseigenschaften günstig ist²;
2. das z-Puffer-Sampling ist nur abhängig von der gerenderten Netzqualität, und nicht von einzelnen, evtl. fehlerhaften Dreiecksnormalen und
3. regelmäßige Szenenaufteilung erleichtert die Parallelisierbarkeit der Beschneigungsalgorithmen.

²Oder anders gesprochen: Weil die Schneeflockengröße im Vergleich zum Szenendurchmesser eine schneespezifische Längenskala in die beschneite Szene einbringt.

Schneebrücken sind stetige Fortsetzungen der Glättung über Spalten hinweg

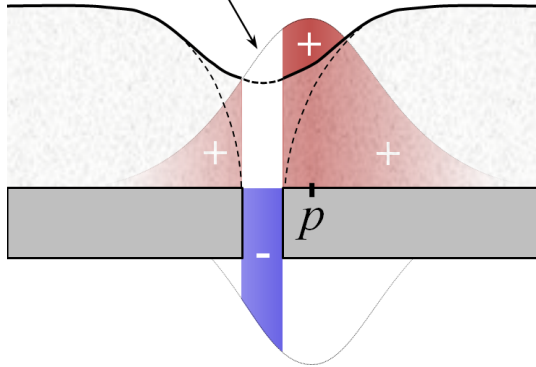


Abbildung 8.5.: Das Prinzip der Schneebrückenbildung lässt sich als stetige Fortsetzung eines Diffusionsprozesses über Spalten hinweg verstehen. Rechts eine günstige Konstellation zur Verdeutlichung des Brückenbildungsprozesses: Der verdeckungsbedingte Schneehöhengradient zeigt, dass Untergrunddiskontinuitäten mit zunehmender Schneehöhe immer leichter überbrückt werden. Maximale Schneehöhe im Foto ca. 18 cm.

Bei effizienter Implementierung und genügend hoher Auflösung können daher auch Ränder hinreichend exakt reproduziert werden.

8.3. Darstellung mittels Distanzfeld

Die erste Möglichkeit zur Ausnutzung der voranstehenden Überlegungen bietet die Modellierung der Schneedecke als Funktion eines Distanzfeldes. Das Distanzfeld ist eine vereinfachte Vorstufe der Diffusionskernfaltung. Das Verfahren ist in [FG09] publiziert. Die Grundidee besteht darin, überall die Halbraumlösung (7.23) auszunutzen. Das entspricht der Näherung, an allen Randkanten das Prinzip aus Abbildung 8.1 zu verwenden, also alle Ränder als Halbraumränder aufzufassen. Als Argument für die Halbraumlösung dient dann pro Schneestützstelle der Abstand r zum nächsten Außenrand.

8.3.1. Details der Distanzfeldmethode

In Abbildung 8.7 ist der Gesamtablauf der Schneedeckenerzeugung mit der Distanzfeldmethode dargestellt. Ausgangspunkt ist das Modell der unbeschnittenen Szene (A). Das Modell wird übertragen in eine HS-Karte (B). Dann werden die Schneestützstellen p_{ijk}

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

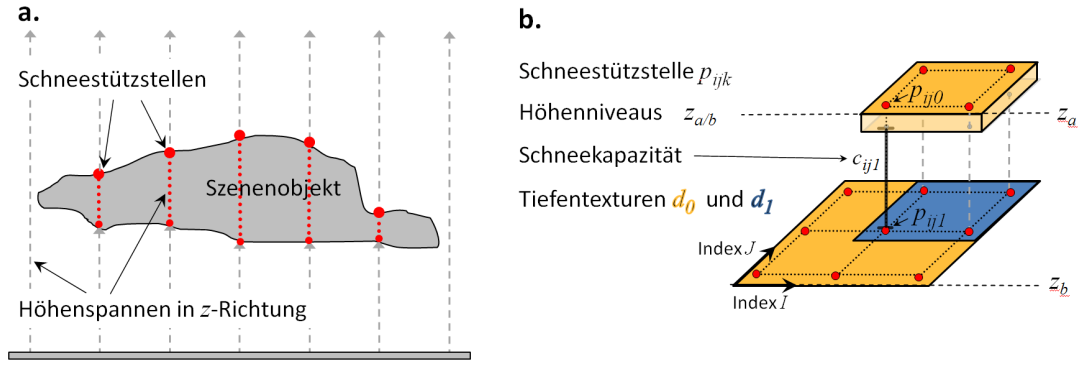


Abbildung 8.6.: a. Die Höhenspannenkarte enthält die Szenengeometrie in Form einer regelmäßigen Abtastung in Vertikalrichtung. b. Die Höhenspannendaten werden aus der Szenengeometrie durch schichtweises Auslesen des z-Puffers der Graphikkarte gewonnen (sog. *depth peeling*).

mit Hilfe eines Flood-Fill-Algorithmus segmentiert (C). Dabei wird für jedes p_{ijk} nach möglichen Nachbarn innerhalb einer Vierer-Nachbarschaft gesucht.

Das Konnektivitätskriterium des Flood-Fills für ein Paar $\{p_{ijk}, p_{i'j'k'}\}$ ist gegeben durch zwei Bedingungen. Offensichtlich muss einerseits die jeweils betrachtete Nachbarhöhenspanne in der Vierernachbarschaft der Ausgangshöhenspanne liegen. Andererseits darf die Höhendifferenz $\Delta z_{ijk,i'j'k'} = (z_{ijk} - z_{i'j'k'})$ nicht größer als ein maximaler Wert z_{\max} sein, gleichzeitig muss es auch die Schneestützstelle sein mit dem geringsten Höhenabstand. Formal schreibt sich das **Konnektivitätskriterium der Distanzfeldmethode** als

1. $|i - i'| = 1 \quad \vee \quad |j - j'| = 1,$
2. $|\Delta z_{ijk,i'j'k'}| \leq z_{\max} = \Delta x \cdot \tan \alpha_{\max} \quad \wedge \quad k' = \underset{k'}{\operatorname{argmin}}(\Delta z_{ijk,i'j'k'}),$

wobei die maximale Höhendifferenz z_{\max} noch über einen maximalen Steigungswinkel α_{\max} und die Samplingweite Δx spezifiziert ist.

Nach der Floodfill-Segmentierung liegen die Schneestützstellen in einzelnen Segmenten vor. Außerdem ist nun für jede Stützstelle die Anzahl der Nachbarn innerhalb eines Segmentes bekannt. Diejenigen Stützstellen, die weniger als vier direkte Nachbarn haben, stellen die Saatstellen für die nachfolgende Distanztransformation (D). Dabei werden zunächst nur die Randstützstellen ausgewählt, die in einer ihrer Nachbarhöhenspannen tieferliegende Stützstellen anderer Segmente haben. Segmentweise wird nun eine Distanztransformation ausgeführt, z.B. nach dem linearen Algorithmus aus [FH04]. Dabei wird jeder Stützstelle eine Randentfernung r zugeordnet. Der Abstand r und die Schneehöhe h sind dabei (wie auch im Folgenden) gegeben als Anteil des Szenendurchmessers. Die Schneehöhe am Rand lässt sich dann als Näherung der Error-Funktion ausdrücken, und zwar als

$$h(r) = h_{\max}(1 - (\beta r - 1)^4), \quad (8.1)$$

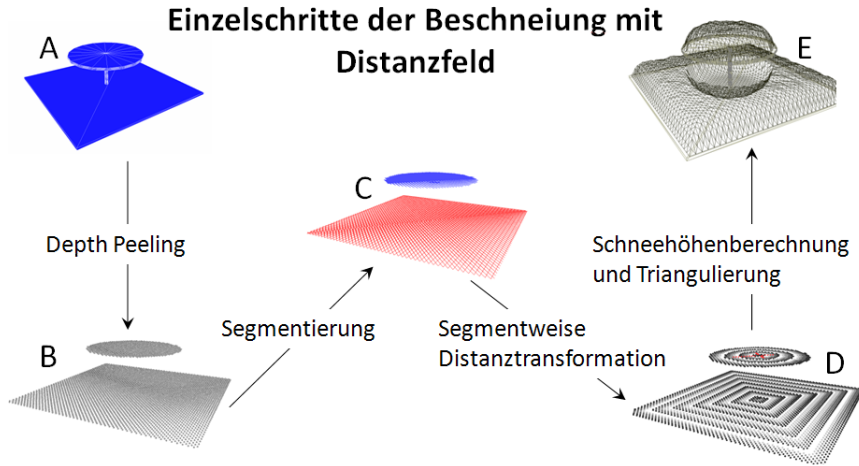


Abbildung 8.7.: Gesamtablauf der Distanzfeldmethode zur virtuellen Beschneidung. (A) Das unbeschneite Ausgangsmodell. (B) Das Modell als Höhenspannenkarte. (C) Die segmentierte Höhenspannenkarte. (D) Die Höhenspannenkartensegmente mit lokaler Randentfernung. (E) Das Ausgangsmodell mit triangulierter Schneeoberfläche darauf.

wobei h_{\max} die maximale Schneehöhe ist und β ein Maß für die Randprofilsteilheit. Die Gleichung gilt für $0 \leq \beta r \leq 1$, für $\beta r > 1$ ist $h = h_{\max}$. Für sehr einfache Szenen genügt dies, um aus den lokalen Schneehöhen eine realistische, triangulierte Schneeoberfläche zu gewinnen. Es lassen sich jedoch noch zwei entscheidende Aspekte natürlicher Schneedecken auf komplexeren Szenen integrieren, und zwar einerseits die Schneehöhenverminderung durch vertikale Verdeckung (siehe Abb. 8.2) und andererseits die Verminderung der maximalen Schneehöhe auf kleinen Segmenten (siehe Abb. 8.3).

Die Schneehöhenverminderung auf kleinen Segmenten lässt sich realisieren, indem in (8.1) ein vermindertes $\tilde{h}_{\max} < h_{\max}$ eingesetzt wird. Der genaue Wert der Verminderung ergibt sich während der Segmentierung aus der maximalen Randentfernung eines Segmentes, d.h. aus dem mittleren Radius R eines Segmentes. Falls $\beta R > 1$, so gilt (8.1) wie gehabt. Andernfalls muss man r umskalieren und h_{\max} anpassen, so dass das volle Randprofil noch auf das Segment passt. Dies geschieht durch $r \rightarrow r/R$ und $h_{\max} \rightarrow R$. Dann wird für jedes Segment mindestens an einem Ort die Schneeoberfläche maximal mit näherungsweise waagerechter Tangente, genau wie es den Beobachtungen in Anhang A.1 entspricht.

Vertikale Verdeckung kann näherungsweise durch die Ausnutzung der Höhenspannenkarte dargestellt werden. Dafür wird nach der Berechnung der Initialschneehöhe nach (8.1) jede Höhenspanne von oben nach unten traversiert. Bei der ersten Schneestützstelle wird versucht, die globale Maximalschneehöhe H_{\max} abzulegen. Dies gelingt, wenn $h \geq H$ und die Schneekapazität $\beta \geq H$. In diesem Fall wird die Traversierung abgebrochen, und alle tieferen Stützstellen der Höhenspannen erhalten die Schneehöhe 0. Wenn die volle Schneehöhe nicht verteilt werden konnte, wird nur die maximal platzier-

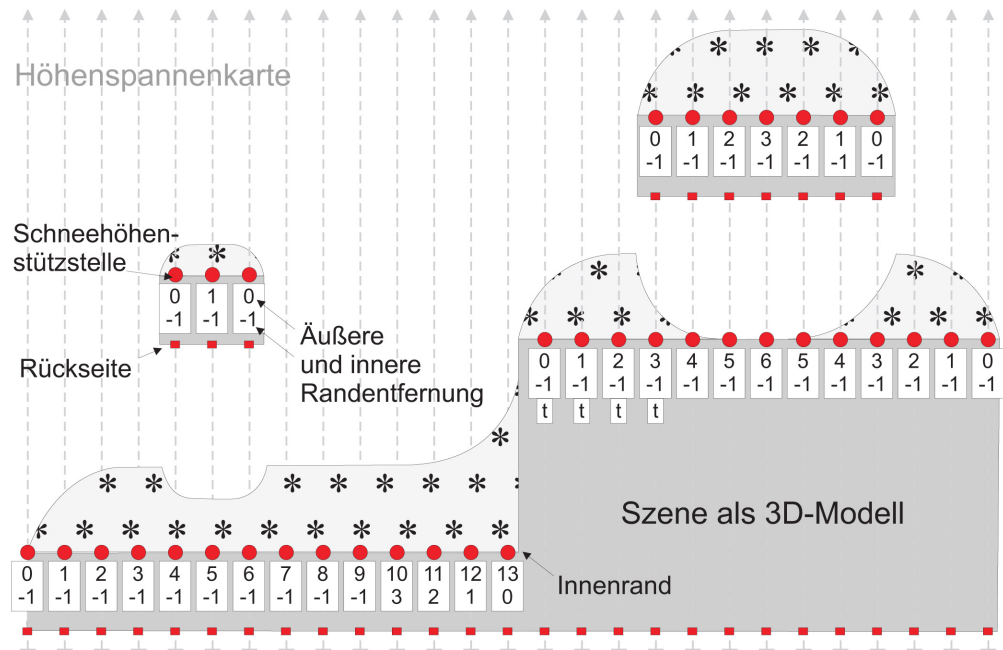


Abbildung 8.8.: Berechnung der Schneehöhe nach der Distanzfeldmethode.

bare Schneehöhe verteilt, und der Rest nach unten weitergegeben. Dort wird dann die maximal restliche verfügbare Höhe platziert bzw. entsprechend weniger. Der Rest wird solange nach unten weitergereicht, bis nichts mehr übrig ist. Mit dieser Methode lässt sich das Bild in 8.2 in guter Näherung reproduzieren.

Der Glättungsaspekt des Schnees lässt sich mit der Distanzfeldmethode nur für den Extremfall des Innenrandes hinzufügen. Ein Innenrand ist dabei ein Rand eines Schneesegementes, der durch einen Sprung nach oben gekennzeichnet ist (dargestellt rechts unten in Abb. 8.4). Auch diese Randpunkte kann man während der Segmentierung markieren, und ausgehend von dort eine zweite Distanztransformation ausführen. Damit definiert man einen Innenrandabstand \tilde{r} . Für die Skalierung gilt das Gleiche wie für r . Der Innenrandabstand wird herangezogen, um einen Schneezusatz zu erzeugen, und zwar wieder gemäß (8.1), allerdings indem man r durch $1 - \tilde{r}$ ersetzt. Dann entsteht eine Schneeoberfläche sehr ähnlich zu der in Abb. 8.4 dargestellten.

Da bei Innenrändern physikalisch gesehen ein Horizontaltransport auftritt, muss man den Vertikaltransport des Schnees oberhalb der Innenränder unterbinden. Dies lässt sich erreichen, indem man an den betreffenden Stützstellen ein Flag t setzt. In Abbildung 8.8 ist das Prinzip der gesamten Schneehöhenberechnung nach der Distanzfeldmethode skizziert. Die Triangulierung der Schneeoberfläche (Abb. 8.7 E) ist trivial dank des regelmäßigen Grundgitters der HS-Karte. Zur Erhöhung des Realitätsgrades kann man die Schneehöhe noch leicht mit Perlin-Rauschen stören.

Abbildung 8.10 zeigt ein ausgewähltes Ergebnis dieser Methode gerendert mit globaler Beleuchtung im direkten Fotovergleich. Die genaue Visualisierungsmethode ist in Kapitel

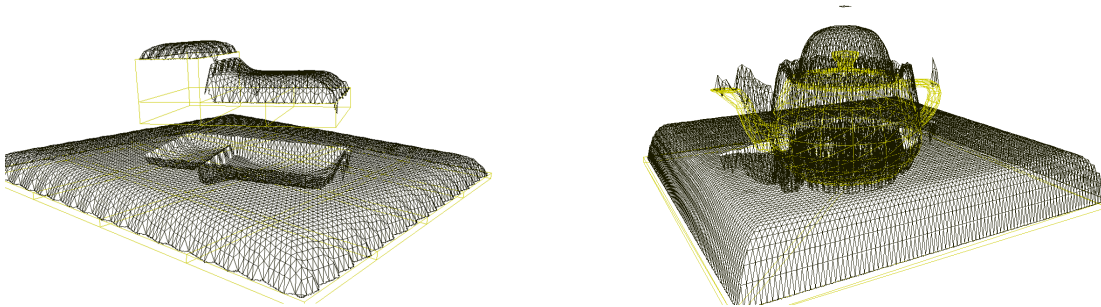


Abbildung 8.9.: Zwischenzustände der Schneeoberflächenerzeugung mit der Distanzfeldmethode. Für einfache Geometrien (links) liefert die Methode korrekte Ergebnisse, für kompliziertere mit verschachtelten Verdeckungs- und Segmentaufteilungen nähert sie realistische Verhältnisse nur unvollständig an (Teekanne rechts).

9 beschrieben. Weitere Ergebnisse, die mit dieser Methode erzeugt wurden, finden sich in Anhang B.1. Alle Berechnungen wurden auf einem auf AMD Athlon 64x2 3800+ mit 2,01 GHz bei 1 GB Ram und einer NVIDIA GeForce 8800 GTS Graphikkarte durchgeführt.

8.3.2. Diskussion

Die Schneedeckenerzeugung mit der Distanzfeldmethode reproduziert zwei wesentliche Eigenschaften natürlichen Neuschnees. Sie erzeugt realistische Randprofile einerseits, und andererseits berücksichtigt sie die unscharfen Verschattungseigenschaften, die sich bei vertikaler Verdeckung in Schneebedeckungen zeigen. Außerdem lässt die Distanzfeldmethode für den Sonderfall der Innenränder auch die Erzeugung von Glättungsstrukturen zu. Im Gegensatz zu vorherigen Schneemodellen dieser Genauigkeit ist der Algorithmus effizient, insbesondere, weil er keine exzessiven Rekursionen³ wie [Fea00a] enthält.

In Abbildung 8.11 sind verschiedene Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl angegeben. Offensichtlich läuft der Algorithmus in linearer Zeit. Im Hinblick auf die Parallelisierbarkeit des Algorithmus gibt es aber einen entscheidenden Nachteil: die Berechnung der Randentfernungen ist nicht lokal, sondern jeweils über ein gesamtes Segment korreliert. Das macht eine effiziente Parallelberechnung zu einer aufwändigen Aufgabe. Ein weiterer Nachteil der Distanzfeldmethode betreffen die Reproduktion der Glättungseigenschaften echten Schnees. Die Näherung mit Hilfe der Innenrandentfernung ist nicht sinnvoll bei komplexeren geometrischen Verhältnissen, etwa bei einem Innenrand der in vertikale Verdeckung übergeht. Glättung ohne Innenrand ist außerdem ganz ausgeschlossen. Schließlich gerät die Methode in Bedrängnis, wenn sich Segmente selbst überlappen. Bildbasierte Distanztransformation wie in [FH04] ist dann nicht mehr

³Außer dem Floodfill natürlich, für den existieren aber effiziente Implementierungen.

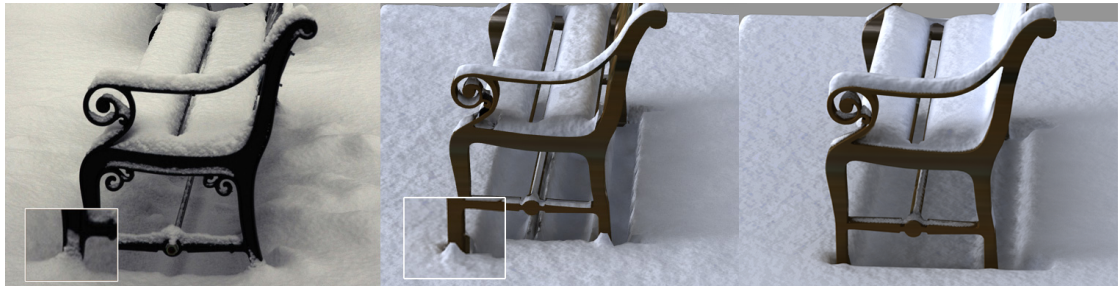


Abbildung 8.10.: Ergebnis der virtuellen Beschneigung nach der Distanzfeldmethode (Mitte) im Vergleich zu einem realen Schneefoto (links) aus [FG09]. Die Vergrößerung zeigt die Auswirkung eines Innenrandes. Tiefentexturauflösung 187×300 , $h_{\max} = 0.065$, $\alpha_{\max} = 80^\circ$, Berechnungsdauer 1,7 s. Zum Vergleich rechts die gleiche Szene beschneit mit der Diffusionskernmethode gerendert mit Randmaske. Berechnungsdauer zur Erzeugung der Schneedecke dort 11,05 s bei $R = 2,5\%$.

konsistent möglich. Stattdessen muss man auf eine Distanztransformation nach dem sog. Region-Growing-Ansatz⁴ ausweichen. Dadurch wird die Methode verlangsamt.

Insgesamt eignet sich die Distanzfeldmethode am besten für einfachere Szenen mit möglichst einfachen und glatten Oberflächen. Dort liefert die Methode zügig brauchbare Ergebnisse.

8.4. Darstellung als Diffusionsprozess

Die genaue Betrachtung der physikalischen Sachverhalte bei der Schneedeckenbildung legt eine bessere Berechnungsvariante nahe. Wie bereits ausführlich erörtert, weist die Beschneigung eine starke Analogie zur Diffusion auf Höhenfeldern auf. Daher basiert die Diffusionsmethode zur virtuellen Beschneigung direkt auf der lokalen Auswertung eines Diffusionskerns K . Der Diffusionskern wird um jede Schneestützstelle ausgewertet. Damit liegt auch ein algorithmischer Vorteil dieser Methode auf der Hand: Die Schneehöhenberechnung wird damit lokalisiert auf die Diffusionskerngröße. Dessen Glättungseigenschaften erlauben außerdem eine Kachelung des Algorithmus. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die Auswertung des Diffusionskerns konsistent für vertikale Verdeckung, Randprofilerzeugung und Glättung zu definieren.

Die folgenden Kapitel sind eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus, der auch in [FG10] beschrieben ist.

8.4.1. Modelldetails

Der Ablauf der Schneegeometrieerzeugung mit der Diffusionskernmethode ist schematisch in Abbildung 8.12 dargestellt. Ausgangspunkt ist wie bei der Distanzfeldmethode

⁴Also dem sequentiellen Abschneiden des Randes einer Region, bis nichts mehr übrig ist.

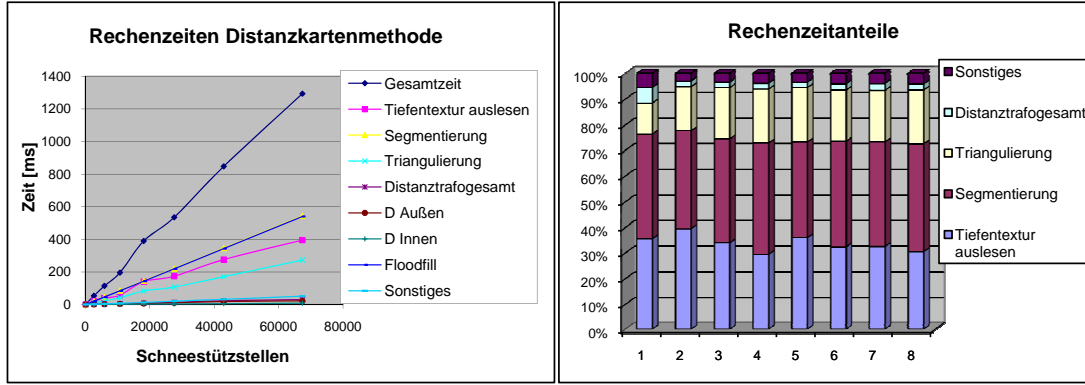


Abbildung 8.11.: Rechenleistung der Distanzfeldmethode in Abhängigkeit von der Schneestützstellenanzahl für einen AMD Athlon 64x2 3800+ mit 2,01 GHz als CPU bei 1 GB Ram und einer NVIDIA GeForce 8800 GTS als GPU. Als Referenzmodell wurde das in Abb. B.4 dargestellte Modell verwendet, wobei 10776 Schneeplätze einer Tiefentexturauflösung von 83×100 entspricht.

die unbeschnittene Szene in Form von Tiefentexturen, die in einer HS-Karte gehalten werden (Schritte A und B). Der zentrale und rechenintensivste Teil des Algorithmus liegt in der Auswertung des Kernes K für jede Schneestützstelle p (Schritt C). Mit der Schreibweise K_p wird im Folgenden die Menge von Stützstellen um ein p herum bezeichnet, die auf die spätere Schneehöhe auf p Einfluss nehmen. K_p ist also das Einzugsgebiet von p , mit $p' \in K_p$ seien die Elemente von K_p bezeichnet. Im allgemeinsten Fall wären das für jede Schneestützstelle *sämtliche* Stützstellen der beschneiten Szene. In der Distanzfeldmethode wurde diese Menge bereits auf ein Schneesegment und dessen vertikale Nachbarn beschränkt. Nach der theoretischen Untersuchung aus Kapitel 6 ist die Wechselwirkungsweite jedoch stark abfallend mit der Entfernung. Es ist daher eine plausible Näherung, nur diejenigen p' zu betrachten, die innerhalb eines zur Schneefallrichtung parallelen Zylinders Z_p mit einem Radius R um p liegen. Innerhalb des Zylinders Z_p dient die Gaußkern-Fundamentallösung (7.8) als Vorbild für die Gewichtung.

Das Einflussgewicht einer Stützstelle p' hängt dann einerseits vom horizontalen Abstand Δx zwischen p und p' ab, und andererseits vom Höhenunterschied Δh in Schneefallrichtung. Der horizontale Abstand ist gegeben durch

$$\Delta x_{p,p'} = \Delta x_{p_{ijk}, p'_{i'j'k'}} = \Delta x_0 \sqrt{(i - i')^2 + (j - j')^2} \quad (8.2)$$

wobei Δx_0 die Abtastrate einer Tiefentextur der beschneiten Szene ist, und i und j bzw. i' und j' die horizontalen Indizes von p und p' , und der vertikale Abstand durch

$$\Delta z_{p,p'} = z_{i'j'k'} - z_{ijk}, \quad (8.3)$$

wobei z_{ijk} und $z_{i'j'k'}$ der Vertikalweltkoordinate von p bzw. p' entsprechen, praktischerweise in Anteilen der Szenenhöhe gegeben, d.h. als 1 minus dem z-Puffer-Eintrag. Abbil-

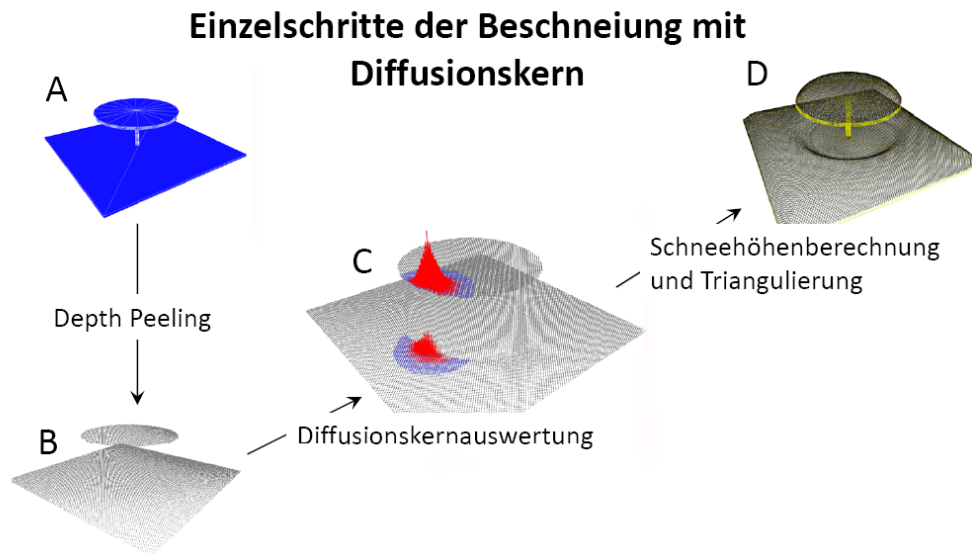


Abbildung 8.12.: Ablauf der Diffusionskernmethode. Der dargestellte Diffusionskern entspricht der numerisch günstigen Form (8.9).

Abbildung 8.13 zeigt die beiden Größen in einer Skizze. Neben den Abständen zu p beeinflussen noch zwei weitere Faktoren die Gewichtung der p' : zum einen die vertikale Verdeckungen im Einzugsgebiet, und zum anderen das Auftreten von Szenenstufen, die die Schneeoberfläche unterbrechen. Für ein zweiseitig begrenztes eindimensionales Schneehöhenfeld $h = h(x)$ lässt sich all das direkt mit Hilfe des Dirichlet-Kerns (7.11) umsetzen, wie es in Abschnitt 8.1 dargestellt ist.

Allerdings tritt in zwei Dimensionen, also für $h = h(x, y)$ eine zusätzliche Schwierigkeit auf. Die Schwierigkeit besteht darin, gleichzeitig verschiedene Ränder zu berücksichtigen, d.h. mehrere, unregelmäßige Randbedingungen zu berücksichtigen. In der analytischen Diffusionsgleichungslösung wurde dies durch Überlagerung lokal gerader Randbedingungen gelöst, mittels der sogenannten Teilung der Eins (7.12). Bei der Schneedeckenerzeugung zeigt sich die Schwierigkeit, wenn sich zwei Ränder näher als der Kernradius R kommen. In einer Dimension bewirkt dies die Ausbildung von Brückenrändern, wie sie in Abbildung 8.5 skizziert sind. Die Schneehöhe erreicht dort mit dem einfachen Dirichlet-Kerns nicht mehr exakt Null; stattdessen wird die Schneehöhe aufgewölbt. In zwei Dimensionen ist die unmittelbare Nähe zweier Ränder der Normalfall: er tritt buchstäblich an jeder Ecke auf. Wie schon bei der analytischen Lösung gezeigt, genügt der einfache Dirichlet-Kern dann nicht mehr, um einen exakten Nulldurchgang an jedem Rand zu erzielen. Durch geschickte Variation der Gewichte lässt sich das Prinzip des Dirichlet-Kerns jedoch auch für die Erzeugung eines zweidimensionalen Schneehöhenfeldes anwenden.

Grundsätzlich könnten sämtliche direkt erreichbaren p' innerhalb des Einzugszylinders

Z_p einen Einfluss auf die Schneehöhe s an der Stützstelle p . Zur Berechnungsbeschleunigung wird das Einzugsgebiet auf eine vertikal aufgefächerte Kreisfläche beschränkt, so dass pro Gitterpunkt (i', j') innerhalb des Zylinders nur genau ein p' betrachtet wird. Die jeweils beste Definition der $p' \in K_p \subset Z_p$ zu finden, ist ein wesentliches Merkmal der Diffusionskernmethode. Eine wirksame Möglichkeit dazu wird am Ende dieses Abschnittes dargestellt. Unabhängig von der genauen Auswahl der p' gilt es jedoch, eine Schema zur konsistenten Gewichtung der p' zu erörtern, so dass man die Schneehöhe $h_{ijk} = h_p$ in $p = p_{ijk}$ angeben kann als

$$h_{ijk} = h_p = F(Z_p), \quad (8.4)$$

also als Funktion des Einzugszylinders Z_p . Man kann die Funktion F noch durch mehrere Annahmen spezifizieren, so dass die spätere Auswertung erleichtert wird. Zuerst erweist es sich wie in Abschnitt 8.1 dargestellt als zweckmäßig, von der Gesamtschneehöhe h_{\max} auszugehen, und die Faltung nur zur Veränderung dieses Wertes heranzuziehen. Schließlich hat die lokale Verdeckung $v \in [0..1]$ in vertikaler Richtung noch einen schneehöhenvermindernden Einfluss. Die Gesamtverdeckung $V \in [0..1]$ hängt dabei maximal vom gesamten Einzugszylinder Z_p ab. Dies rechtfertigt als Ansatz für die lokale Schneehöhe an der Stützstelle p die Form

$$h_p = F(Z_p) = V(Z_p) (h_{\max} - f(K_p)), \quad (8.5)$$

wobei $f(K_p) \in [-h_{\max}..h_{\max}]$ die Gewichte aller $p' \in K_p$ zusammenfasst und nur von $\Delta x_{p,p'}$ aus (8.2) und $\Delta z_{p,p'}$ aus (8.3) abhängt. Der Fall $f(K_p) = 0$ bedeutet keine Veränderung der Schneehöhe gegenüber der mittleren Maximalhöhe, $f(K_p) = -h_{\max}$ bedeutet keinen Schnee, und $f(K_p) = h_{\max}$ die doppelte mittlere Gesamthöhe (analog zum Innenrand bei der Distanzfeldmethode)⁵.

Grundlage zur Spezifikation von (8.5) ist die Angabe eines diskretisierten und normierten Gaußkerns G analog zu (7.8). Die naheliegendste Möglichkeit ist die rotations-symmetrische und radiusabhängige Form

$$G(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R^2} e^{-\frac{\rho^2}{2R^2}}, \quad (8.6)$$

wobei R der Breite des Kernes entspricht. Offenbar ist $G(\rho)$ nur für $\rho \rightarrow \infty$ normiert. Eine brauchbare diskrete Form muss daher beim Kernradius $\rho = R$ abgeschnitten werden. Dann wird der Radius ρ durch Abtastungen des oben definierten Δx ersetzt, und schließlich normiert. Geringfügig veränderte Formulierungen von $G(\rho)$ können die Einhaltung der Randbedingungen verbessern, wie weiter unten gezeigt werden wird. In Abbildung 8.13 ist das Δx -abhängige Gewicht durch die Transparenz der Balken an den Stützstellen dargestellt.

Mit $G(\Delta x)$ lässt sich die Verdeckungsfunktion $V(Z_p)$ spezifizieren: für alle $p' \in K_p$ wird geprüft, ob vertikale Verdeckung vorliegt oder nicht. Dabei wird eine lokale Verdeckung

⁵Es ist zu beachten, dass als Anteil der Szenenhöhe ausgedrückt praktisch auch $h_{\max} \in [0..1]$ gilt: Maximalschneehöhen deutlich größer als die Szenenhöhe sind wenig sinnvoll, da so viel Schnee alle Details begraben würde und visuell wenig reizvoll wäre.

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

$v(p') \in [0..1]$ bestimmt, die dann mit dem Gewicht $G(\Delta x(p, p'))$ in die Gesamtverdeckung eingeht als

$$V(Z_p) = \sum_{p' \in K_p} v(p') G(\Delta x(p, p')). \quad (8.7)$$

Mit dieser Definition ist auch garantiert, dass $V(Z_p) \in [0..1]$. Für diese Arbeit wurde es als ausreichend festgestellt, $v(p')$ als diskret anzunehmen, d.h. $v = 0$ für verdeckte p' und $v = 1$ für unverdeckte; man könnte die Vertikalverdeckung auch leicht gewichten, beispielsweise mit der lokalen Schneekapazität.

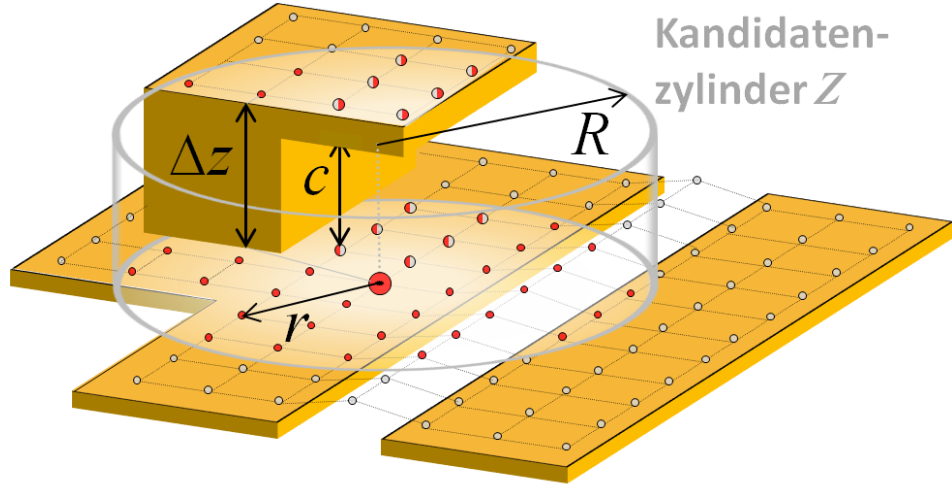


Abbildung 8.13.: Diffusionskernauswertung. c ist die Schneekapazität, d.h. die freie Höhe über einer Schneestützstelle, Δz die Höhendifferenz zwischen zwei Stützstellen, R der Kernradius und r der lokale Randabstand. Genauere Erläuterungen im Text

Der Term $f(K_p)$ aus (8.5) beinhaltet die eigentliche Faltung des Untergrundhöhenfeldes mit dem Diffusionskern. Die naheliegende Annahme $f(K_p) = \sum_{p' \in K_p} G(\Delta z(p, p'))$, also die einfache Faltung führt jedoch nicht zum Ziel, weil die Höhendifferenzen zwischen p und p' in der Szene im Allgemeinen beliebig zwischen -1 und 1 variieren können (in Anteilen der Szenengesamthöhe ausgedrückt). Im Extremfall können zum Beispiel alle p' auf der Höhe $z = 0$ liegen und p auf $z = 1$. Für eine Maximalschneehöhe $h_{\max} < 1$ erhielte man dann eine negative Schneehöhe h_p . Dass dies ein weiterer Aspekt der Schwierigkeit ist, beliebige Randbedingungen konsistent einzuhalten, zeigt sich bei der Berechnung der Schneehöhe auf Ecken von Segmenten. Man kann sich dies anhand von Abbildung 8.13 veranschaulichen. Der Einfachheit halber sei eine uniforme Gewichtung G auf K_p gegeben, die Δx -unabhängig von Δz abhängt. Sei weiter eine gerade Szenenstufe gegeben, die im oberen Teil bei $z = 0,5$ und unten bei $z = 0$ liegt. Dies entspreche der Situation, die in Abbildung 8.13 links in der Draufsicht dargestellt ist. Man betrachte weiter ein p , das genau oben auf der Stufe liege. Man kann die Normierung von G nun so wählen,

dass die Schneehöhe h_p genau Null wird: die eine Hälfte von K_p geht positiv ein, die andere negativ, genau wie es in einer Dimension mit dem Dirichlet-Kern (7.11) gelöst war. Wenn man die gleiche Gewichtung jedoch auf einer Ecke verwendet, wird die Schneehöhe nicht mehr exakt gleich Null (bzw. $|f(K_p)| > 1$). Eine Lösung, die die Ausbildung von Lücken in der Schneedecke bei zu schroffem Untergrund berücksichtigt (siehe Abb. 8.4), ist die Begrenzung der Höhendifferenzen Δz auf das Intervall $[-h_{\max}, h_{\max}]$. Dies kann man mittels einer Clamp-Funktion

$$\lambda(\Delta z) = \begin{cases} \Delta z, & \text{falls } |\Delta z| < h_{\max} \\ \text{sgn}(\Delta z)h_{\max}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.8)$$

erzielen, die man statt Δz bei der Faltung mit G multipliziert. Mit dieser Definition kann man positive Schneehöhen garantieren, allerdings verschwindet die Schneehöhe an den Rändern noch nicht ganz.

Eine erste Korrektur ist eine Umgewichtung des Kerns, bei der kleine Abstände größere Gewichte erhalten als bei der Normalverteilung. Dadurch weichen die Schneehöhen an den Rändern etwas weniger von Null ab. In dieser Arbeit hat sich die Wahl

$$G(\Delta x) \propto (R - \Delta x)^4 \quad (8.9)$$

bewährt. Dies entspricht näherungsweise dem Nahbereich einer sogenannten Lévy-Verteilung, wie sie in Abbildung 8.14 der Gauß-Verteilung gegenübergestellt ist. Die vollständige Lévy-Verteilung findet sich in der Natur bei sogenannten superdiffusiven Transportprozessen, die bei manchen Epidemien zu beobachten sind [Gei09]. Eine systematische Untersuchung über das Auftreten von Lévy-Transport bei der Schneeakkumulation liegt jedoch jenseits des Rahmens dieser Arbeit.

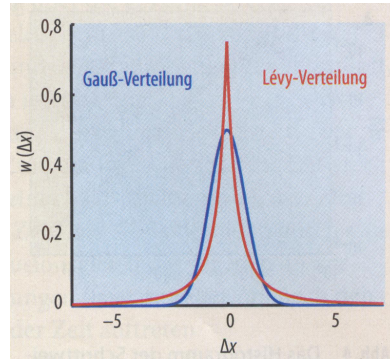


Abbildung 8.14.: Die Lévy-Verteilung im Gegensatz zu Normalverteilung (aus [Gei09]) in willkürlichen Einheiten. Die Gewichtung des Nahbereichs bei der Lévy-Verteilung verbessert die Einhaltung der Randbedingungen bei der Schneedeckenerzeugung.

Um generell die Schneehöhe am Rand zum Verschwinden zu bringen, bedarf es der Einführung eines Randkorrekturfaktors g , wie er in Abbildung 8.13 eingetragen ist. Dazu bedient man sich der Idee der Außenrandentfernung r aus der Distanzfeldmethode,

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

und überträgt sie lokal auf die Kernumgebung K_p . Innerhalb von K_p wird dazu festgestellt, ob es p' gibt mit Höhenunterschieden $\Delta z(p, p') < -h_{\max}$. Falls das nicht der Fall ist, wird $g = 1$ gesetzt. Andernfalls wird dasjenige p' mit $\Delta z(p, p') < -h_{\max}$ ausgewählt, das den kleinsten Abstand zu p aufweist. Als Außenrandentfernung r_p wird dann $r = \Delta x(p, p')/R$ gesetzt, so dass r in $[0..1]$ liegt. Dieser Wert wird zur Berechnung des Randkorrekturfaktors verwendet. In dieser Arbeit wurde die Form

$$g(r) = \sqrt{r(2-r)} \quad (8.10)$$

verwendet, also ein Viertelkreis. Der Viertelkreis hat die günstige Eigenschaft senkrecht auf 0 bei $r = 0$ zuzulaufen und waagrecht auf 1 bei $r = 1$. Dadurch wirkt der Korrekturfaktor g in unmittelbarer Nähe zum Rand am stärksten, und ansonsten nur schwach.

Nun kann man den letzten Term $f(K_p)$ aus (8.5) spezifizieren, und zwar als

$$f(K_p) = g(r_p) \sum_{p' \in K_p} G(\lambda(\Delta z(p, p'))) \quad (8.11)$$

Als letzte Aufgabe verbleibt die Spezifikation der Elemente von K_p im Einzugszylinder Z_p . In der Natur würde sich während des Schneefalls zwischen p und allen Mitgliedern von Z_p ein dynamisches Gleichgewicht einstellen. Die genauen Austauschwege können beliebig komplex sein. Die Schneeflocken können turbulenten und stark gebogenen Pfaden folgen, sie können um Ecken und Verdeckungen herumgeführt werden und auch vielfältig an anderen Objekten reflektiert werden. Insbesondere kann jedes paarweise Transportgleichgewicht auch aus einer größeren Anzahl verschiedener Pfade gebildet werden. Die Menge der Möglichkeiten lässt sich allgemeingültig kaum einschränken. Sinnvoll verwaltbar wird das Problem der Nachbarnwahl erst durch plausible a-priori-Beschränkungen. Das bedeutet, dass man die Wahl auf eine kleine Anzahl von Kriterien stützt. Das Kriterium des Horizontalabstandes Δx wurde schon zur Definition des Einzugszylinders verwendet, zur Gewichtung außerdem der Vertikalabstand Δz . Anschaulich und naheliegend als Kriterien für die Nachbarnwahl sind der Vertikalabstand und die Schneekapazitäten c (von p) und dem zu wählenden Nachbarn (c'). Diese Kriterien und das im Folgenden beschriebene Schema haben sich als wirksam bewährt (Abb. 8.15). Die Schneekapazität ist dabei definiert als der in vertikaler Richtung freie Raum über einer Schneestützstelle. Unverdeckte Stützstellen erhalten eine unendliche Kapazität, verdeckte einen entsprechend kleineren, endlichen Wert.

Der Algorithmus der Nachbarnwahl bekommt als Input also einerseits die Werte für die Höhe $z_p = z_{ijk}$ und die Schneekapazität $c_p = c_{ijk}$, und andererseits die Höhen $\{z_{*k'}\}$ und Schneekapazitäten $\{c_{*k'}\}$ aller Schneestützstellen in der jeweils betrachteten Höhen-spanne an der Position (i', j') . In der Höhenspanne an (i', j') stehen so viele Kandidaten k' zur Verfügung, wie es dort Schneestützstellen gibt, d.h. $k' = 0 \dots k'_{\max}$. Formal findet der Algorithmus eine Zuordnung

$$\{(c_{ijk}, z_{ijk}), (c_{i'j'0}, z_{i'j'0}), (c_{i'j'1}, z_{i'j'1}), \dots, (c_{i'j'k'_{\max}}, z_{i'j'k'_{\max}})\} \rightarrow k', \quad (8.12)$$

die möglichst diejenige Stützstelle $p' = p_{i'j'k'}$ liefert, die dem maximalen Schneeaustausch mit p entspricht. Das Auswahlschema läuft iterativ. Der Iterationsanfang k'_0 ist

eindeutig definiert durch den minimalen Höhenunterschied $\Delta z_{\min} = \min_{k'}(z_{ijk} - z'_{i'j'k'})$, ähnlich dem zweiten Teil des Konnektivitätskriteriums der Distanzfeldmethode. Wenn die Schneekapazitäten von c_p und $c_{i'j'k'_0}$ beide größer als die maximale Schneehöhe h_{\max} sind, kann man in hinreichend häufigen Fällen davon ausgehen, dass die Wahl k'_0 bereits eine ausreichende Lösung von (8.12) ist; der Algorithmus terminiert dann (Abb. 8.15, Fall 1).

Wenn nur über p genug Platz ist, über p'_0 aber nicht, also $c \rightarrow \infty \wedge c_{i'j'k'_0} < h_{\max}$, dann wird die Suche nach oben fortgesetzt. Anschaulich entspricht das dem Fall der Überdeckung von Hohlräumen unter der Schneedecke. Die würde zum Beispiel in Abb. 8.13 auftreten, wenn der Überhang durch die anwachsende Schneedecke überdeckt würde. Ein reales Beispiel ist in Abb. A.21 dargestellt. Der Algorithmus prüft dann schrittweise an den nächst höheren Schneestützstellen, also $p'_{i'j'(k'_0+n)}$, ob die Schneekapazität ausreicht, also ob $c'_{i'j'(k'_0+n)} \rightarrow \infty$. Diese Suche führt immer zu einem Fund, und zwar bei $k'_0 + n = k'_{\max}$, wo die Schneekapazität unbeschränkt sein muss (weil die Szene dort endet, siehe Abb. 8.15, Fall 2).

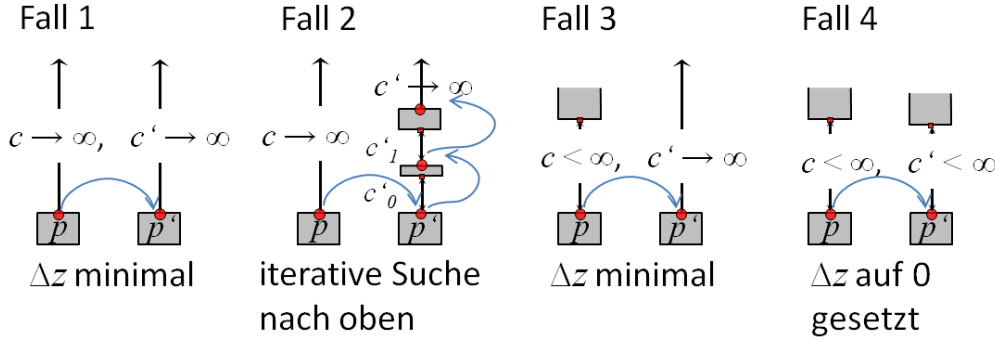


Abbildung 8.15.: Auswahlkriterien der Kernmitglieder von K_p . Die erste Wahl ist durch die minimale Höhendifferenz Δz_{\max} gegeben (Fall 1). Details für die weiteren Fälle im Text.

Wenn die Kapazität auch über p beschränkt ist, dann gibt es noch zwei weitere Fälle (Abb. 8.15, Fälle 3 und 4). Bei Fall 3 ist nur $c < \infty$ während $c' \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist. Dann wird das p' mit der minimalen Höhendifferenz gewählt, es bleibt also der Iterationsanfang k'_0 bestehen. Der vierte und letzte Fall ist gegeben, wenn p und p' nach oben beschränkt sind, wenn also $c < \infty \wedge c_{i'j'k'_0} < \infty$ (siehe Abb. 8.15 Fall 4). Dann wird $\Delta z_{p,p'}$ auf 0 gesetzt. Damit wird die Situation angenähert, dass weder p noch p' auf direktem Wege von Schneeflocken erreicht werden können, dass also der Beitrag von p' zur Schneehöhe an p minimal im Sinne der Kernausswertung (8.11) ist.

Abbildung 8.16 zeigt zwei Rohergebnisse aus der Kernmethode, Abbildung 8.17 zeigt ein fertig gerendertes Bild im Vergleich zu einem realen Foto.

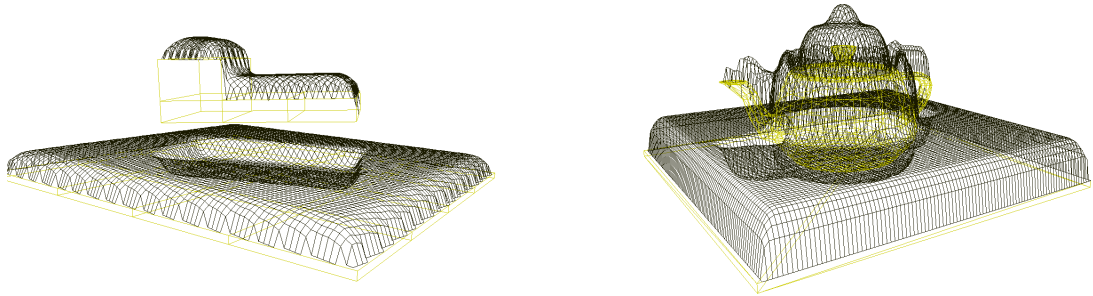


Abbildung 8.16.: Rohergebnisse erzeugt mit der Diffusionskernmethode. Man erkennt die realistische Wiedergabe der vertikalen Verdeckung und die korrekte Überdeckung kleinerer Details am Griff des Teekannendeckels. Der schmale Spalt zwischen Deckel und Kanne führt ohne Brücken jedoch noch nicht zu einem optimalen Ergebnis.

8.4.2. Diskussion

Die Diffusionskernmethode bietet einen wirksamen Ansatz für die zwei Grundaufgaben der virtuellen Schneedeckenerzeugung, nämlich die Behandlung der vertikalen Sichtbarkeit und die realistische Wiedergabe der Schneerandprofile. Die Sichtbarkeit wird über den Diffusionskern effizient bestimmt, das Randprofil ergibt sich näherungsweise ebenfalls daraus, allerdings bedarf es zusätzlich eines lokalen Korrekturtermes ähnlich wie bei der Distanzfeldmethode.

Die Recheneffizienz der Diffusionskernmethode ist etwas niedriger als bei der Distanzfeldmethode. Die Laufzeit-Komplexität der Kernausswertung bei konstantem Kernradius liegt offenbar⁶ bei $O(n^2)$, wobei n die Anzahl der Schneeplätze in der Szene ist. Die Messergebnisse in Abb. 8.18 bestätigen diese Anschauung. Die Abhängigkeit vom Kerndurchmesser R weist aus den gleichen Gründen quadratische Komplexität auf (siehe Abb. 8.18 rechts). Für sehr große Kernradien nahe 1 erscheint die Komplexität etwas günstiger, dies liegt jedoch daran, dass die meisten Kerne dann nicht mehr vollständig in die Szene passen und am Szenenrand abgeschnitten werden.

Trotzdem basiert die Diffusionskernmethode auf einigen Näherungen, die in der Natur nicht immer gelten. Die Berechnung der Schneedecke mittels Diffusionskern ist nichts anderes als die approximierte Lösung der Differentialgleichung (7.7) in *einem* Schritt für einen beliebigen Zeitpunkt t . Prinzipiell ist diese Vorgehensweise äquivalent zur punktweise simulierten Lösung in vielen kleinen Zeitschritten (siehe Kap. 7). Eine solche Approximation wäre möglicherweise ein lohnenswertes Unterfangen, insbesondere dann, wenn es um die Animation der Schneedeckenentwicklung gehen soll. Die Lösung mit

⁶Pro Schneeplatz wird ein konstanter Szenenanteil betrachtet. Die Anzahl der Schneeplätze in diesem Anteil wächst genauso schnell wie die Gesamtanzahl der Schneeplätze in der Szene.



Abbildung 8.17.: Beschneieung mit der Diffusionskernmethode gerendert mit globaler Beleuchtung: ein beschneites Modell des Goldenen Reiters zusammen mit einem Referenzfoto. Auflösung 102×250 , Kerngröße 0,05 % des Szenendurchmessers, Berechnungsdauer zur Schneedeckenerzeugung 4654 ms (Rechner wie in Abb. 8.10). Rohdaten des Reiters aus Laserscandaten von Prof. H.-G. Maas, fertige 3D-Modellierung C. Schubert.

Diffusionskern ist jedoch von Vorteil, wenn das Ziel - wie in dieser Arbeit - die realistische, effiziente und nicht-rekursive Oberflächendefinition ist.

Grundsätzlich ist die Reichweite eines Gaußkernes unbeschränkt. Daher ist die Beschränkung auf den finiten Kandidatenzylinder Z eine Näherung, die vor allem für komplexere Sichtbarkeitsverhältnisse ungenau wird. Die Näherung gilt zum Beispiel dann nicht, wenn die Szene in der Vertikalen treppenartig gestaffelt ist. Eine Schneeflocke kann zum Beispiel entlang einer fast senkrechten Felswand weite horizontale Strecken zurücklegen. Praktisch tritt dieser Fall jedoch nur selten auf.

Weiterhin wurde die Kernauswertung innerhalb des Zylinders auf eine Kreisscheibe beschränkt. Auch diese Näherung gilt nur für einfache Sichtbarkeitsverhältnisse. Die Verdeckung eines Schneeplatzes durch Überhänge in der Grundszenen wie in der Skizze 8.13 werden dadurch prinzipiell vernachlässigt. Eine exakte Behandlung solcher Verhältnisse wäre jedoch sehr aufwendig. Im Extremfall könnte auch ein Schneeplatz p von den Kandidaten in Z aller Höhenlagen gleichmäßig Schneeflocken erhalten. Dann würde jedoch die Entscheidung für jeweils einen Nachbarn in die Konnektivitätsdefinition

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

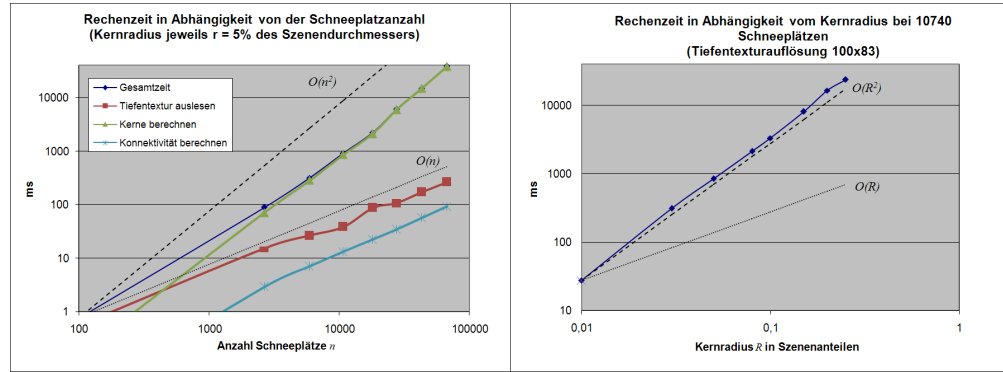


Abbildung 8.18.: Performanz der Diffusionskernmethode. Referenzmodell wie in 8.11.

der Oberfläche verschoben, und auch dann bliebe sie willkürbehaftet. Ein Blick in den Anhang A.6 zeigt, dass es vermutlich nicht endgültig möglich ist, diese Wahl exakt zu formalisieren.

Die praktische Umsetzung der Diffusionskernmethode fällt bei der Erzeugung des Randprofils lokal zurück auf die Grundidee der Distanzfeldmethode. Man könnte argumentieren, dass mit dem r -abhängigen Faktor g die gesamte Kernidee streng genommen hinfällig wird. So könnte man auch den Befund interpretieren, dass die exakte Kernform $G(\rho)$ kaum entscheidend ist. Zur Verteidigung lassen sich mindestens zwei Gegenargumente anführen. Einerseits bietet die oben entwickelte Kernausswertung zumindest eine Näherung für das reale Schneerandprofil, auch ohne den Faktor r . Andererseits erlaubt der Diffusionskern aber erhebliche Präzisierungen gegenüber der Distanzfeldmethode, zum Beispiel für die Bestimmung der vertikalen Verdeckung und für die Berechnung der Glättung durch die Schneedecke. Schließlich zeigt die schwache Abhängigkeit des Schneedeckenergebnisses von der Kernform auch, dass die Grundidee so zutreffend ist, dass nicht mehr alle Details kritisch sind.

Ein besonderer Vorteil der Diffusionskernmethode besteht darin, dass die Berechnung lokalisiert wird im Gegensatz zu rekursiven Methode oder Distanzfeldern. Dadurch lässt sich der Algorithmus prinzipiell parallelisieren und auch konsistent kachelweise für eine Szene ausführen. Eine Implementierung auf der GPU dürfte daher gut machbar sein. Auch die bis bis vor kurzem übliche Beschränkung der maximalen Anzahl der gleichzeitig ladbaren Texturen stellt mit CUDA oder OpenCL kein Hindernis mehr dar.

8.5. Erweiterung für Überhänge und Schneebrücken

Den vorgestellten Höhenfeldmethoden ist eins gemein: sie können nur Schneehöhen erzeugen, aber keine Überhänge oder Schneebrücken. In der Natur kommt beides vor; Anhang A.5 zeigt einige Beispiele. Im Folgenden wird dargestellt, wie sich sowohl Schneebrücken also auch Überhänge in den Diffusionskernansatz integrieren lassen. Die Grundidee für die Integration der Schneebrücken besteht darin, vor der eigentlichen Kernausswertung als zusätzliche Schneeplätze einzufügen. Überhänge können schließlich als horizontaler

Versatz-Vektor zur fertigen Oberfläche definiert werden.

8.5.1. Brückenerzeugung

Ausgangspunkt der Brückenerzeugung sind die unverarbeiteten Tiefentexturen, noch bevor sie in die HS-Karte übertragen werden. Im Folgenden wird der Einfachheit halber nur die oberste Tiefentextur betrachtet, d.h. diejenige Schicht, die an jeder Stelle direkt sichtbar in Schneefallrichtung ist⁷.

Modellvorstellung zur Brückenerzeugung

Als Modellvorstellung dient wieder ein Diffusionsprozess, diesmal jedoch nicht in Schneefallrichtung sondern senkrecht dazu. Das entspricht einer Annäherung an das Modell der anisotropen Reaktionsdiffusion aus Kap. 6.2.3. Die oberste Tiefentexturschicht enthält nur an den Stellen Höheneinträge ungleich Null (also z.B. Einsen), an denen sich auch Schneeplätze befinden, der restliche Platz auf der Textur ist unbesetzt, bzw. auf null gesetzt. Nun wird auf der gesamten Textur ein Diffusionsprozess angestoßen. Zunächst werden alle Schneeplätze als Einsen angenommen, und der Rest als Null. Der Diffusionsprozess verwandelt schrittweise alle die Nullen in Einsen, die Einsen als direkte Nachbarn haben. Dies kann man sich als Epidemieausbreitung [Fes05] auf einem Zweizustands-Zellularautomaten vorstellen. Die Verwandlung einer Null in eine Eins entspricht der Erzeugung eines neuen Schneeplatzes. Die zweidimensionale Vorstellung genügt jedoch nicht, um die z -Koordinaten der neuen Plätze zu beschreiben. Dazu bedarf es eines vollständig dreidimensionalen Modells in der Art des Reaktionsdiffusionsansatzes in Kap. 6.2.3.

Implementierung der Brückenerzeugung

Die Höheninformation der neuen Schneeplätze muss daher für die Implementierung gesondert gewonnen werden. Offenbar ergibt sie sich als Interpolation zwischen den Höhen der Stützstellen einer Brücke. Es bietet sich an, dafür den Zeitpunkt der Schneeplatzzerzeugung zu Hilfe zu nehmen. Der Zeitpunkt ergibt sich direkt aus der Entfernung eines neu erzeugten Schneeplatzes zum nächsten initial besetzten Schneeplatz. Der Betrag der Entfernung ist in der Sprache synchroner Zellularautomaten der Ordnung des Updateschritts, zu dem ein Schneeplatz erzeugt wurde. Der Zeitpunkt der Schneeplatzzerzeugung kann auch als Alter t_a eines Schneeplatzes aufgefasst werden, wobei $t_a \in [0..1]$. Es bedeutet $t_a = 1$ einen initialen Schneeplatz in der Ausgangstextur, und $t_a < 1$ neu erzeugte (Brücken-)Schneeplätze. Neue Plätze mit $t_a < 0$ werden ausgeschlossen, indem die Brückenbildungsdiffusion abgebrochen wird nach Ablauf einer auf eins normierten Brückendiffusionszeit. Nun gilt es nur noch, die Propagation der Brückenstützstellen entlang des Brückenwachstums konsistent zu formalisieren.

Beides lässt sich mit einer einfachen Methode realisieren. Als Parameter wird nur die maximale Brückenspannweite b_{\max} in Szenenanteilen benötigt. Die Ausgangstextur wird

⁷Siehe Kap. 8.5.4 zur Diskussion dieser Vereinfachung.

zeilenweise in x - und in y -Richtung durchlaufen. Pro Zeile werden nun Abschnitte gesucht, die durch Spalten, also markant lokale Höhenminima des Untergrundes - kürzer als b charakterisiert sind. Als markant gilt ein Höhenminimum, wenn $\Delta h > 2h_{\max}$. Das folgende Beispiel illustriert die Methode. Die Ausgangstextur habe eine Auflösung von 20×20 und es sei $b_{\max} = 0,2$. In einer der Zeilen sei eine Höhensequenz $\{1, 0, 0, 0, 1/2\}$ zu finden. Der Brückenerzeugungsalgorithmus wird dann an Stelle der Nullen neue Schneeplätze erzeugen. Die genauen Höhenwerte lassen sich aus den Höhen der Brückenstützen interpolieren, beispielsweise linear als $\{1, 7/8, 6/8, 5/8, 1/2\}$. In der Natur tritt jedoch häufiger eine parabelartige Ausbuchtung nach oben auf, siehe auch Anhang A.5. Dies kann man darstellen durch die Addition einer geeignet skalierten Parabel zu den linear interpolierten Werten, also z.B. $\{1, 7/8 + 1/16, 6/8 + 2/16, 5/8 + 1/16, 1/2\}$. So eine Form wurde auch bei allen in dieser Arbeit gezeigten Brücken so verwendet. Das Brückenalter t_a , also im Beispiel die Sequenz $\{1, 3/4, 2/4, 3/4, 1\}$ wird gespeichert, um sie zur Kernausswertung zu verwenden, und zwar als zusätzliches (verminderndes) Gewicht an λ in (8.11).

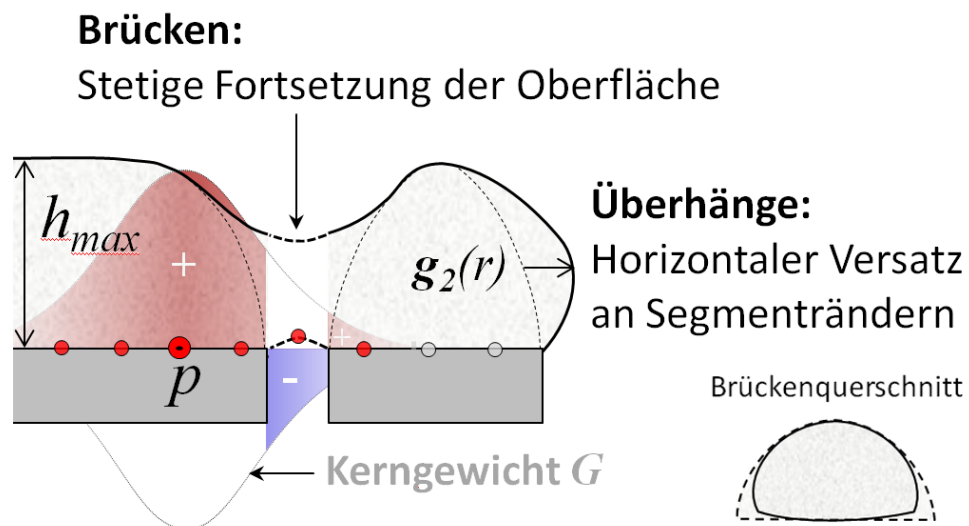


Abbildung 8.19.: Skizze zur Brücken- und Überhangerzeugung. Details im Text.

Abbildung 8.19 zeigt links eine Skizze der Brückenerzeugung. Rechts unten ist außerdem ein Querschnitt einer Brücke dargestellt. Aus dem Querschnitt wird ersichtlich, inwiefern die neu erzeugten Brückenplätze noch einer Nachbearbeitung bedürfen: Die Unterkanten der Brücke sind in der oben beschriebenen Form unrealistisch eckig (gestrichelte Linie im Brückenquerschnitt). Dieses Problem lässt sich jedoch zusammen mit der Überhangerzeugung lösen.

8.5.2. Überhangsberechnung

Grundsätzlich entstehen Überhänge im Zentimeterbereich in der Natur wohl aus einem ähnlichen Grund wie Schneebrücken (siehe Kap. 6). Die separate Berechnung der Über-

hänge ist jedoch sinnvoll, weil sich dann das Ergebnis präziser beeinflussen lässt. Die Modellvorstellung ist daher die gleiche wie bei der Brückenerzeugung.

Implementierung

Die Überhänge werden parametrisiert nach dem Vorbild des Vorfaktors $g(r)$ zur Einhaltung der Randbedingungen in (8.11). Sie sind definiert wie in Abb. 8.19 skizziert als ein Versatzvektor $\vec{g}_2(\vec{r})$. Die Richtung ergibt sich aus der Richtung der kürzesten Randentfernung r wie in Abb. 8.13 dargestellt, es gilt also

$$\vec{g}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} g_r(r). \quad (8.13)$$

Der Versatzvektor wird nach der Berechnung des Schneedeckennetzes zu den Vertexpositionen in Randnähe addiert. Der Betrag $|\vec{g}_2(\vec{r})| = g_r(r)$ muss offenbar für $r = 0$ und für $r = 1$ verschwinden, um konsistent zu bleiben. Die genaue Wahl ist eine Frage des gestalterischen Zieles der Beschneidung, in der vorliegenden Arbeit wurde

$$g_2(r) = (1 - r)^2(1 - (1 - r)^2) \quad (8.14)$$

verwendet, mit $r \in [0..1]$, und einer Skalierung $c \in \mathbf{R}$. Für die Behandlung von Brückenträndern muss man eine ähnliche Funktion verwenden, um den in Abb. 8.19 unten rechts skizzierten durchgezogenen Brückenquerschnitt zu erzeugen. Für $r = 0$ muss g_2 dann kleiner Null werden. In dieser Arbeit wurde dies erreicht in dem (8.14) für ein auf $[-1/4..1]$ skaliertes r verwendet wurde. Abbildung 8.20 zeigt die Form von (8.14).

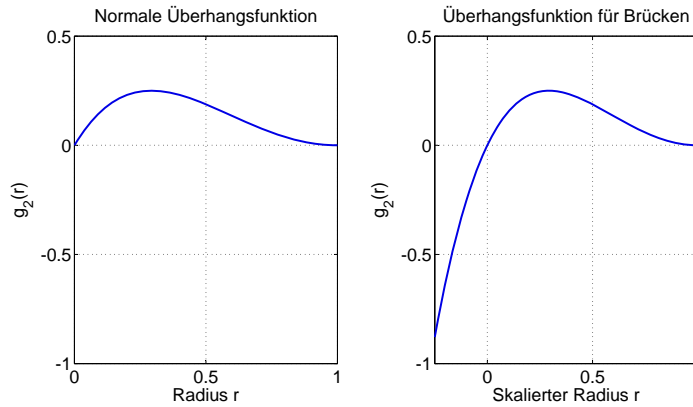


Abbildung 8.20.: Die Randfunktion $g_2(r)$ aus (8.14) für Brücken und Überhänge, jeweils ohne Skalierung (also $c = 1$).

8.5.3. Ergebnisse

In Abbildung 8.21 sind wie auch für die vorangegangenen Methoden Rohergebnisse dargestellt. Die zusätzlichen Berechnungszeiten für Brücken- und Überhangserzeugung sind

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

kleiner als 1% der Gesamtberechnungszeiten. Abbildung 8.22 zeigt eine Ergebnissequenz fertig gerendert. In Anhang B.3 sind weitere Ergebnisbilder zusammengestellt. In Abb. B.7 ist außerdem der Einfluss der maximalen Brückenspannweite b illustriert.

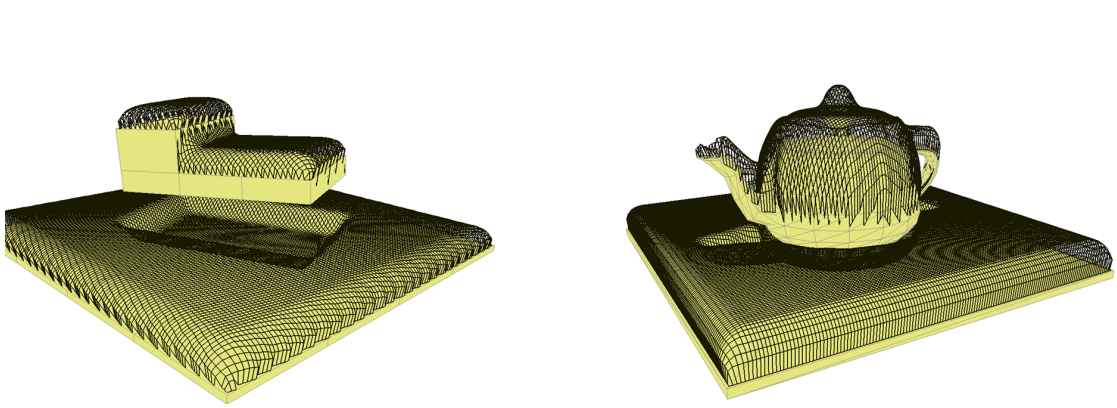


Abbildung 8.21.: Rohergebnisse der Beschneigung mit der Diffusionskernmethode mit Brücken und Überhängen. Während links kein deutlicher Unterschied zu sehen ist, zeigt sich die visuelle Verbesserung durch Brücken am Teekannendeckel rechts deutlich (vgl. Abb. 8.16).



Abbildung 8.22.: Gerenderte Ergebnisse von links nach rechts: ohne Brücken, mit Brücken ($c_{\text{Brücke}} = 0,5$), mit Brücken und Überhängen ($c_{\text{Brücke}} = 0,5$, $c_{\text{Überhang}} = 1$). Auflösung 258×200 , Rechenzeit zur Schneenetzerzeugung jeweils ca. 23 s.

8.5.4. Diskussion

Grundsätzlich ist der oben beschriebene Ansatz zur Integration von Brücken und Überhängen in die Diffusionskernmethode heuristischer Natur. Vom theoretischen Standpunkt her ist dies natürlich ein Manko, insbesondere weil Überhänge und Brücken bei hoher Skalierung in Widerspruch geraten können (schwach erkennbar in Fig. 8.22 im Vordergrund ganz rechts).

Für die Zukunft wäre es daher ein sinnvolles Unterfangen, Brücken und Überhänge einheitlich zu formalisieren. Eine Möglichkeit dazu wäre beispielsweise, diffusiv an allen Abrisskanten neue Schneeplätze wachsen zu lassen. Wenn sich zwei wachsende Abrisskanten dann durchdrängten, dann wäre eine Brücke zu erzeugen. Dazu muss man noch ein konsistentes Schema zur Propagation und Vereinigung der z -Koordinaten konzipieren. Dies ist nicht trivial, vor allem dann nicht, wenn man die Brückenbildung auch auf untere, evtl. halbverdeckte Schneesegmente ausdehnt. Dabei ist nicht mehr eindeutig, welche Schichten wie miteinander verbunden werden sollen. In dieser Arbeit wurde auf eine Ausarbeitung dieses Aspektes verzichtet, weil vertikal verdeckte Brücken visuell von untergeordneter Bedeutung sind (siehe Anhang A.5).

8.6. Vergleich und Verallgemeinerbarkeit der Schneemodellierungsansätze

Die vorgestellten Implementierungsansätze beruhen alle auf der Theorie, die in dieser Arbeit entwickelt wurde. Daher sind die Ergebnisse auch grundsätzlich ähnlich. Die Berechnungseffizienz der Distanzfeldmethode ist aus den oben angegebenen Gründen höher als die der Diffusionskernmethode. Dafür ist die Diffusionskernmethode für komplexere Szenen einsetzbar. Für vorwiegend gerade Szenen ist der Unterschied der beiden Methoden kaum erkennbar (siehe Abbildung 8.10 und B.1).

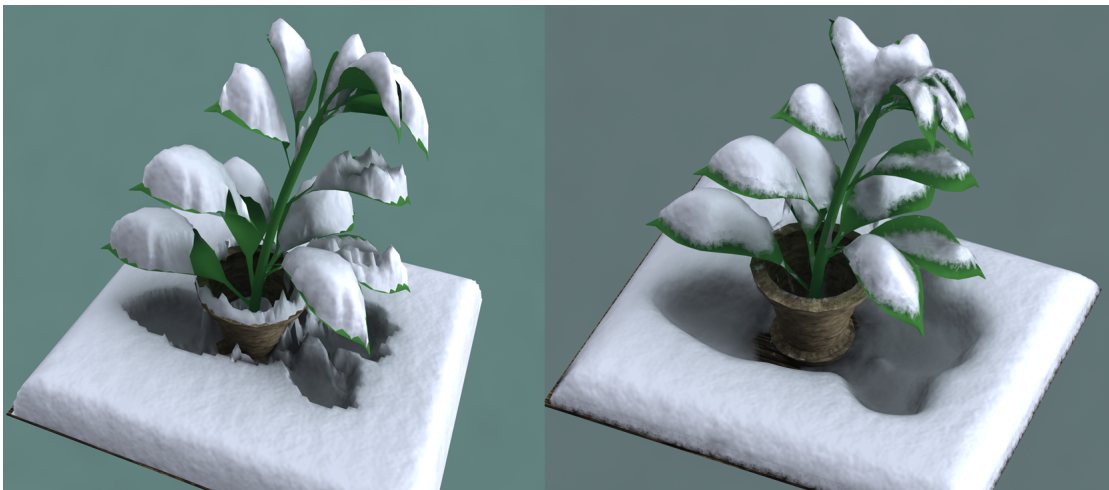


Abbildung 8.23.: Szene aus B.4 im Methodenvergleich, jeweils 83×100 Pixel als Tiefentexturauflösung. Links: Distanzfeldmethode gerendert ohne Randmaske, Geometrierzeugungsdauer 0,65 s. Rechts: Diffusionskernmethode gerendert mit Randmaske, Geometrierzeugungsdauer inkl. Texturierung 2,36 s.

Abbildung 8.23 zeigt den höheren Realitätsgehalt der Diffusionskernmethode. Insbesondere die Reproduktion der vertikalen Verdeckung erscheint deutlich realistischer,

8. Computergraphische Erzeugung von Schneeoberflächengeometrien

wenn Diffusionskerne ausgewertet werden.

Zum Abschluss folgen einige Überlegungen zur Verallgemeinerbarkeit der vorgestellten Implementierungsansätze und zur Idee der diffusiven Oberflächenerzeugung. Das Prinzip der Diffusion ist ein weit verbreitetes Standardverfahren in der Computergraphik, und nicht nur dort. Wie bereits erörtert ist es bisher nicht üblich gewesen, Diffusion als Methode zur Oberflächenerzeugung zu verwenden. Dadurch wird auch klar, dass die hier beschriebene Verwendung eher der Spezialfall eines allgemeineren Konzeptes ist, und nicht umgekehrt. Formale Verallgemeinerbarkeit ist also unwahrscheinlich.

Vom Standpunkt der Modellierung natürlicher Phänomene ergibt sich jedoch eine gestalterische Verallgemeinerbarkeit. Sie besteht darin, die Diffusionskernmethode zur Erzeugung anderer natürlicher Beschichtungen zu verwenden. Dabei muss nur die Texturierung der erzeugten Oberfläche ausgetauscht werden. Abbildung 8.24 zeigt zwei Beispiele dafür: Vergoldung und Begrasung. Staub- oder Laubschichten könnten auf die gleiche Weise erzeugt werden.

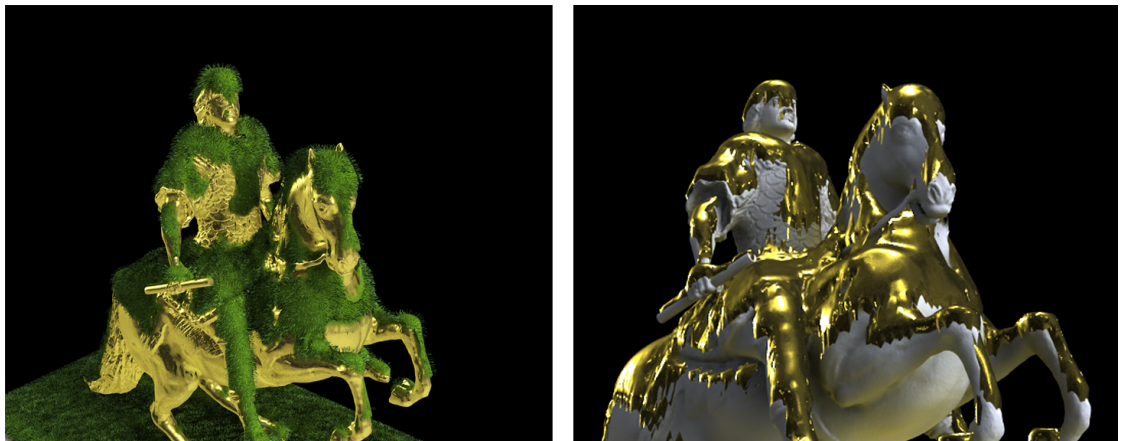


Abbildung 8.24.: Erzeugung von Gold- und Grasbedeckungen mit dem Schneemodellierungsalgorithmus durch Austausch der Texturierung.

Darüber hinaus lässt sich zum gegenwärtigen Zeitpunkt aber nicht ausschließen, dass sich in Zukunft neue Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Schneemodellierung ergeben können.

9. Visualisierung virtueller Schneeoberflächen

Die Visualisierung der virtuell erzeugten Schneeoberfläche ist ein wesentlicher Aspekt der computergraphischen Schneemodellierung. Auch wenn er nicht zentral im Rahmen dieser Arbeit ist, wird im Folgenden zumindest skizziert, welche methodische Praxis zu verwendbaren Ergebnissen führt. Die Visualisierung besteht aus zwei Anteilen, einerseits den Textureigenschaften der Oberfläche, und andererseits der Behandlung der Schnittstellen zwischen Untergrund und Schneekörpern.

9.1. Schneeoberfläche

Natürliche Schneeoberflächen sind alles andere als glatt, auch wenn dies für die visuelle dominante Größenskala von Metern und Dezimetern den Anschein hat. Im Zentimeterbereich lassen sich bereits deutliche Unebenheiten erkennen (siehe z.B. Abbildung 6.1 rechts). Wie bereits erörtert sind diese Unebenheiten aber nicht entscheidend für den makroskopischen Aufbau¹ von Schneebedeckungen. Eine heuristische Beurteilung der Unebenheiten legt nahe, skalenfreie Größenverteilung zu vermuten, wie so oft in der Natur (siehe Kapitel 6.2.2). Dies wird durch das bereits eingeführte Perlin-Rauschen realistisch reproduziert. Das Perlin-Rauschen kann verwendet werden, um die erzeugte Schneeoberfläche per Bump-Mapping [Bli78] mit Perlin-Rauschen zu versehen. Wenn man eine 3D-Textur mit Perlin-Rauschen für die ganze Szene verwendet, dann erspart man sich auch die globale Erzeugung von Texturkoordinaten für die Schneeoberfläche. Jeder Schneeoberflächenpunkt kann seinen Bump-Mapping-Betrag direkt aus der Perlin-3D-Textur auslesen.

Als Farbwerte sind am realistischsten für den ambienten Teil sehr helle Blautöne, für den diffusen Anteil helle Blautöne, und für die Glanzlichter rein weiße Töne. Der spekulare Anteil ist nur sehr schwach, evtl. könnte man ihn mit hochfrequenten zusätzlichen Bump-Maps zur Erzeugung sehr kleiner Eiskristall-Reflexionen heranziehen.

Bei geeigneter globaler Beleuchtung mit z.B. 3D-Studio Max lassen sich damit fotorealistische Ergebnisse erzielen. Abbildung 9.1 zeigt ein Beispiel des beleuchteten Materials im Vergleich zu einem Foto.

¹Genauer: für die mesoskopische oder visuell dominante Begrenzungen.

9. Visualisierung virtueller Schneeoberflächen



Abbildung 9.1.: Rendern von Schneeoberflächen mit 3D-Perlin Rauschen als Bump-Mapping. Links zum Vergleich ein Foto einer realen Szene.

9.2. Schneeränder

Je näher man eine Szene betrachtet, desto deutlicher wird sichtbar, dass Schneebedeckungen vom Untergrund nicht durch klare Trennlinien abgegrenzt sind, sondern durch unscharfe Übergangsbereiche. Abbildung A.1 im Anhang zeigt ein Beispiel dafür. Abbildung 9.2 zeigt eine Nahaufnahme eines solchen Übergangsbereiches. Diesen Befund kann man für tiefentexturbasierte Beschneigungsmethode mit zweifachem Vorteil ausnutzen. Schneedecken nämlich, die aus den Tiefentexturen einer Szene gewonnen werden, neigen zu eckigen Begrenzungslinien an den Auflageflächen. Offensichtlich verschärft sich das Problem mit abnehmender Tiefentexturauflösung.

Dieses Aliasing kann man nun mit der gleichen Methode beseitigen, mit der sich auch die natürlich auftretenden unscharfen Übergangsbereiche erzeugen lassen. Die Idee besteht darin, eine Alpha-Maske auf alle die Bereiche des Schnees abzubilden, die mit der unbeschneiten Grundszene in Kontakt stehen. Als Alpha-Maske bietet sich ein Foto einer realen Schneeabgrenzung an. In dieser Arbeit wurde für diesen Zweck das

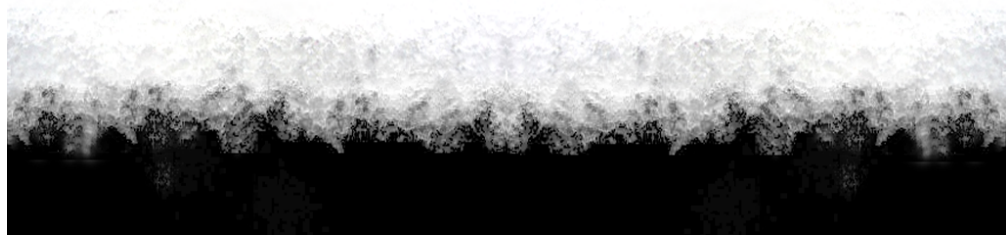


Abbildung 9.2.: Per Spiegelung verdoppeltes Graustufenfoto des Auflagebereiches realer Schneebedeckung. Reale vertikale Länge des Ausschnitts: ca. 3 cm.

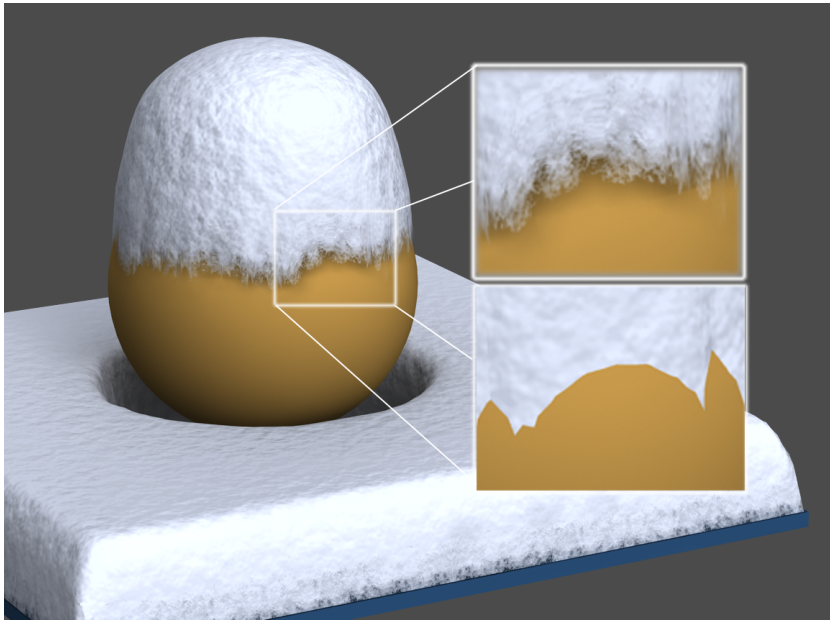


Abbildung 9.3.: Schnee mit und ohne Alphamaske am Rand.

Foto aus Abbildung 9.2 verwendet, wobei die Graustufen als Alpha-Werte verwendet wurden (wobei schwarz einem Alpha-Wert von Null entspricht).

Um die Maske möglichst verzerrungs- und sprungfrei auf das Schneenetz abzubilden muss man Texturkoordinaten berechnen. Dabei ist es ausreichend, die Texturberechnung auf einen Streifen in Randnähe zu beschränken. Daher muss man das Schneenetz in einen inneren und einen Randteil aufspalten. Bei der späteren Visualisierung ist diese Aufspaltung unsichtbar, wenn man für beide Netzanteile das gleiche Material und die gleiche 3D-Textur für das Bump-Mapping verwendet. Die Alpha-Maske aus Abb. 9.2 ist so gewählt, dass zu den Netzmitten hin überall Alpha-Werte gleich eins auftreten.

Für die Berechnung der Alpha-Masken-Texturkoordinaten muss man als Parameter minimal die Breite des Übergangsbereiches angeben, z.B. in Anteilen des Szenendurchmessers. Dann besteht die Aufgabe darin, zunächst alle Ränder zu detektieren. Prinzipiell können dabei nur geschlossene Randschleifen auftreten. Für jede geschlossene Randschleife muss man dann eine zyklisch passende Besetzung für die u -Koordinaten der Textur berechnen. Das ist möglich, indem man approximativ versucht, vielfache der Eingangstexturlänge auf die Randschleifenlänge anzupassen. Die Berechnung der v -Koordinate senkrecht zum Rand erfolgt z.B. per dreiecksbasierter Propagation und Mittelung nach innen. An spitzen Ecken in der Randschleife kann es dabei zu unerwünschter Verdichtung der u -Koordinate kommen; dies kann man durch Glättungsiterationen beseitigen. Eine detaillierte Beschreibung einer algorithmischen Umsetzung dieser Aufgabe mittels angepasster Standardverfahren ist in [FG10] dargestellt.

In Abbildung 9.3 ist ein Beispiel zur Demonstration der Wirksamkeit der Alpha-Randmaske dargestellt. Abbildung 9.4 zeigt zwei Bilder, bei denen nur die gerenderten

9. Visualisierung virtueller Schneeoberflächen

Randschleifen gezeigt sind. Dabei wird unter anderem deutlich, dass der Übergangsbereich des Randes mit größeren Szenenausdehnungen zunehmend unwesentlicher wird.

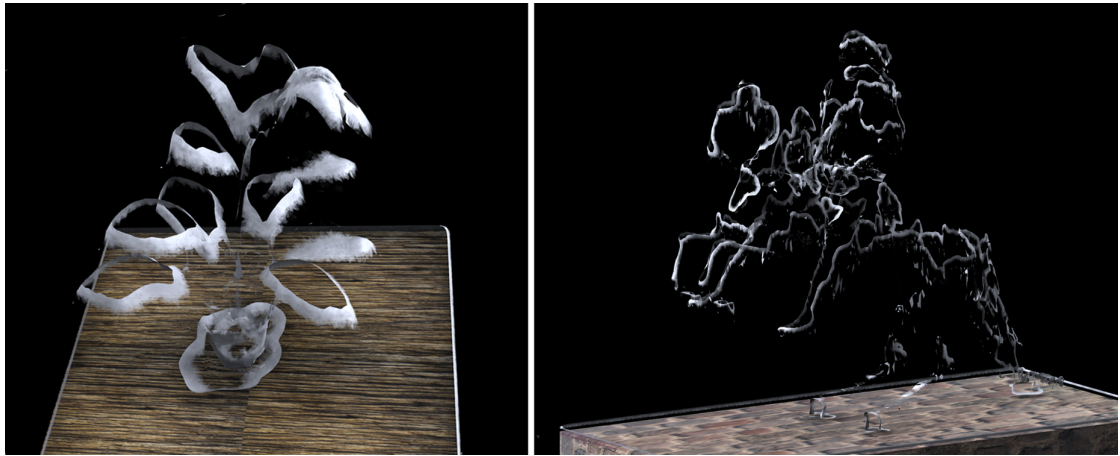


Abbildung 9.4.: Gerenderte Randschleifen zu den Abbildungen B.4 und B.5.

9.3. Diskussion

Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden zur Visualisierung von modellierten Schneeoberflächen sind tauglich für eine fotorealistische Darstellung. Dennoch bleiben einige Aspekte unbehandelt. Zunächst geht der Ansatz von einem homogenen Erscheinungsbild der Randübergänge aus. Dies ist in der Natur nicht gegeben. Tau- oder Umkristallisationsprozesse können sich besonders an diesen Rändern bemerkbar machen (siehe z.B. Anhang A.6). Genauso wurden alle Erscheinungsformen des Schnees vernachlässigt, die durch einzelne Schneeflocken dominiert werden. Schließlich ist das photographische Problem des hohen Kontrastes in sonnenbeschienen und beschneiten Szenen weiterhin unberührt. Es gibt eine Vielzahl von Ansätzen, die sich dieses Problems im Allgemeinen annehmen (siehe z.B. [RWD05]), aber keine schneespezifischen.

10. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

10.1. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Teilgebiet der computergraphischen Naturphänomenmodellierung ausführlich erörtert, und zwar das der virtuellen Beschneigung. Virtueller Schnee war bislang ein vergleichsweise spärlich bearbeitetes Phänomen. Insbesondere fehlten beobachtungsgestützte, systematische Zugänge. Diesen Mangel zu beheben war die Motivation dieser Arbeit.

Daher bildet ein ausführliches Kapitel zur Klassifikation der natürlichen Phänomenmodellierung in der Computergraphik den Anfang der Dissertation (Kap. 3.5). Es wird eine Möglichkeit ausgeführt, wie sich die Beziehung zwischen der Informatik und der Modellierung natürlicher Phänomene in der Computergraphik verstehen lässt. Daran anschließend wird umfassend auf Repräsentationsformen und Modellierungsmethoden natürlicher Phänomene für virtuelle Welten eingegangen. Es zeigt sich im Überblick, dass die Menge der praktikablen Methoden überschaubar zu organisieren ist. Die bisherigen Arbeiten in der Computergraphik zu natürlichen Phänomenen lassen sich auf diese Weise klassifizieren. Daraus ergeben sich Hinweise auf mögliche Entwicklungsrichtungen der Forschung in Zukunft. Das Phänomen Schnee erscheint vor dem Hintergrund der Klassifikationen als reichhaltiger Phänomenkomplex.

Zur Fundierung der Schneemodellierung folgt eine Darstellung der Eigenschaften natürlichen Schnees (Kapitel 4 mit Anhang A). Die Eigenschaften ergeben sich aus der Entwicklungsgeschichte des Schnees in den Wolken bis zu seinem Verschwinden bei Tauen auf dem Boden. Aus den verschiedenen Stadien ergibt sich ein Katalog von computergraphisch modellierbaren Aspekten des Schnees. Mit dem Katalog lässt sich die bisherige Literatur zur computergraphischen Schneemodellierung zusammenfassen und sortieren (Kapitel 5). Es zeigt sich eine leichte Unterrepräsentation systematischer Ansätze, zu Gunsten eines Übergewichts ergebnisorientierter Ad-hoc-Ansätze.

In Kapitel 6 wird der Versuch unternommen, die Schneeakkumulation auf visueller Skala mit den Grundlagen der theoretischen Physik zu beschreiben. Die Hauptschwierigkeit ist die Behandlung des Phasenüberganges, der sich durch den Dichtesprung des Materialflusses frei fallender Schneeflocken an Schneeoberflächen ergibt. Statistische Überlegungen legen eine isolierte Betrachtung der Oberflächenbewegung nahe. Die Modellvorstellung der getriebenen und diffusiv wachsenden Oberfläche erweist sich als geeignet für Schneeoberflächen. Eine ausführliche Darstellung der mathematischen Eigenschaften von Diffusionsgleichungen auf Höhenfeldern (Kapitel 7) dient als Vorarbeit für die computergraphische Umsetzung. Analytische Lösungsbeispiele zeigen außerdem die Eignung

des Diffusionsansatzes zur virtuellen Beschneigung.

Kapitel 8 bildet den algorithmischen Kern der Dissertation. Hier werden die vorangegangenen Überlegungen in implementierbare Algorithmen übertragen. Eine Höhenspannenkarte lässt sich verwenden, um zwei Arten der Implementierung zu erstellen: einmal mit einer Distanzfeldmethode [FG09] und einmal mit der Diffusionskernmethode [FG10]. In die Diffusionskernmethode lassen sich außerdem Aspekte integrieren, die über Höhenfelder hinausgehen: Schneebrücken und Überhänge. Eine Visualisierungsart für die generierten Schneeoberflächen ist in Kapitel 9 dargestellt. Perlin-Rauschen als dreidimensionale Bump-Map zusammen mit Alpha-Masken an den Schneeändern bilden die Voraussetzung für die Erzeugung fotorealistischer Ergebnisse. Beispiele photorealistischer Ergebnisbilder sind im Anhang B angefügt. Damit ist das formulierte Ziel der Dissertation erreicht.

10.2. Schlussfolgerungen

Wie kann es weitergehen mit der Entwicklung der computergraphischen Schneemodellierung? Die Annäherung der virtuellen, technisch vermittelten Realität an die eigentliche Realität ist vermutlich asymptotisch und daher immer unfertig (siehe Kap. 3.2). Für den Schnee zeichnen sich zwei naheliegende Weiterentwicklungsmöglichkeiten ab. Die erste ist der Umbau der Diffusionskernmethode für parallele Rechnerarchitekturen. Die Diffusionskerne sind bereits sehr gut zur Parallelisierung geeignet. Daher wird es mit vergleichsweise kleinem Aufwand möglich sein, eine effiziente GPU-Implementierung zur automatischen Beschneigung zu konzipieren. Eine effiziente Implementierung kann auch für die Erweiterung gängiger 3D-Modellierungssoftware gute Dienste leisten; dies wäre aber auch schon ohne Parallelisierung ein lohnenswertes Unterfangen.

Möglichkeiten zur prinzipiellen Weiterentwicklung der vorgestellten Schneemodelle können sich an der Klassifikation aus Kapitel 4.5 orientieren. Maßgebliche Beiträge sind wahrscheinlich am ehesten für die dynamisch-interaktiven Aspekte des Schnees zu erzielen, beispielsweise bei der Spurbildung in Neuschnee.

Das Grundprinzip der in dieser Arbeit erörterten Schneemodellierung ist beispielhaft für die Formalisierung natürlicher Erscheinungen: Ein sehr komplexes Phänomen wird auf seine deterministische Essenz reduziert, die volle Komplexität wird als Turbulenz mit einem separaten Modell aufaddiert. Dies wird wahrscheinlich auch in Zukunft ein wirksamer, weil modular orientierter Ansatz der allgemeinen Naturphänomenmodellierung bleiben.

Die Überzeugungskraft virtueller Welten wird weiter an täuschender Echtheit gewinnen. Hoffen wir, dass die Manipulierbarkeit der virtuellen Ersatzwelten nicht zu noch respektloserem Verbrauch der lebendigen Erde verleitet. Hoffen wir, dass die virtuelle Welt in ihrer prinzipiellen Begrenztheit stattdessen auf die scheue, aber unermessliche Schönheit des wirklichen Lebens verweist.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen

A.1. Randprofile und Stützflächenabhängigkeit



Abbildung A.1.: Ein einzelnes Schneesegment in Nahaufnahme. Maximalschneehöhe ca. 5 cm.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen



Abbildung A.2.: Zwei Schneesegmente mit unterschiedlicher Randsteilheit.



Abbildung A.3.: Randprofile bei geneigtem Untergrund.



Abbildung A.4.: Mehrere Randprofile aus der Ferne betrachtet zeigen ein sehr homogenes Erscheinungsbild.

A.2. Verdeckung



Abbildung A.5.: Drei Beispiele kleinräumiger, vertikaler Verdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 15 cm.



Abbildung A.6.: Zwei Beispiele mittlerer vertikaler Verdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen



Abbildung A.7.: Vertikal sehr weiträumige Verdeckung mit flachem Schneehöhenabfall in die Verdeckung hinein. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.



Abbildung A.8.: Breite, mittelhohe und weiträumige Vertikalverdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.

A.3. Glättung



Abbildung A.9.: Schneebedeckung glättet rechteckigen Untergrund. Schneehöhe ca. 12 cm.



Abbildung A.10.: Schneebedeckung glättet einen Sprung im Untergrund. Schneehöhe ca. 18 cm.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen



Abbildung A.11.: Schneebedeckung glättet dreieckigen und teils verdeckten Untergrund. Schneehöhe ca. 15 cm.



Abbildung A.12.: Schneebedeckung glättet einzelne Unebenheiten. Schneehöhe ca. 18 cm.



Abbildung A.13.: Schneeglättung lässt scharfe Unebenheiten unberücksichtigt. Schneehöhe ca. 3 cm.



Abbildung A.14.: Viel Schnee glättet über eine kleine Tanne hinweg. Schneehöhe ca. 40 cm.

A.4. Innenränder



Abbildung A.15.: Idealtypischer Innenrand der Schneebedeckung in Drauf- und Seitenansicht. Schneehöhe ca. 15 cm.



Abbildung A.16.: Leicht gealterte Schneeinnenränder. Schneehöhe ca. 12 cm.



Abbildung A.17.: Innenrand auf natürlichem Grund. Schneehöhe ca. 10 cm.

A.5. Brücken und Überhänge



Abbildung A.18.: Zwei Überhänge verbinden sich zu einer Schneebrücke. Schneehöhe ca. 15 cm.



Abbildung A.19.: Flache Ansicht der beginnenden Brückenbildung. Schneehöhe ca. 15 cm.

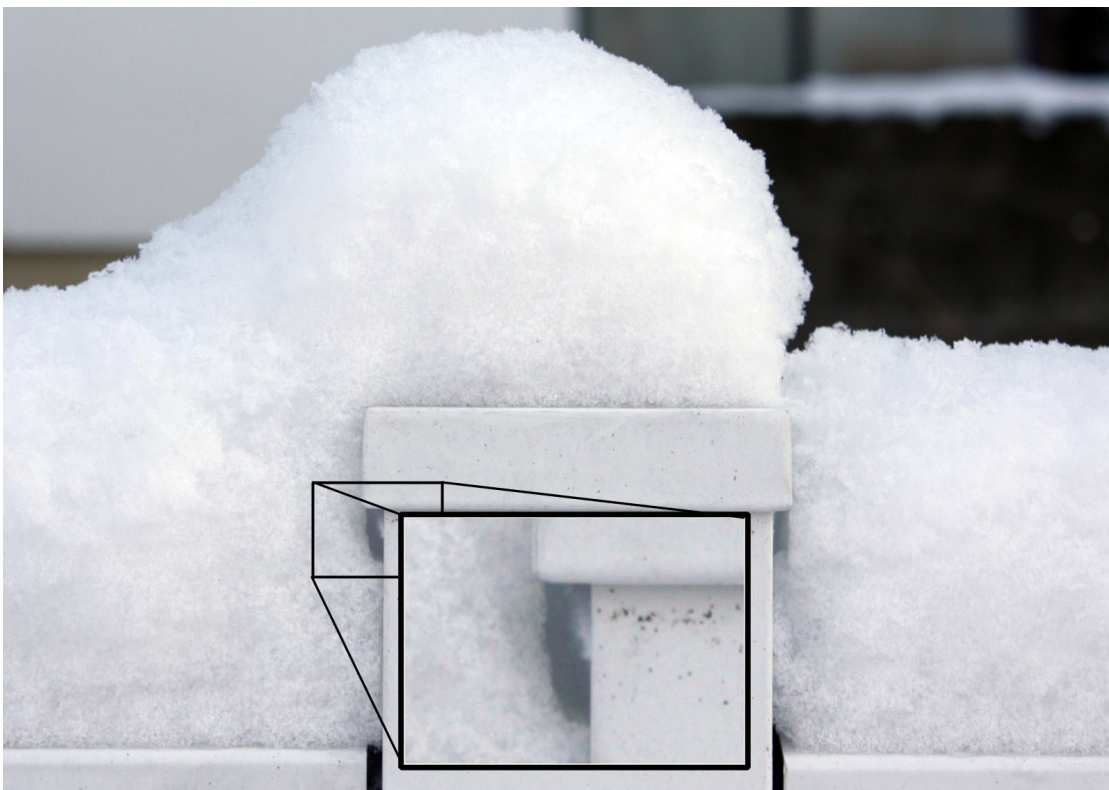


Abbildung A.20.: Ein Überhang in der beschneiten Geometrie wird überdeckt durch die Schneedecke. Schneehöhe ca. 14 cm.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen



Abbildung A.21.: Extremes Beispiel der Brückenbildung. Schneehöhe ca. 15 cm.

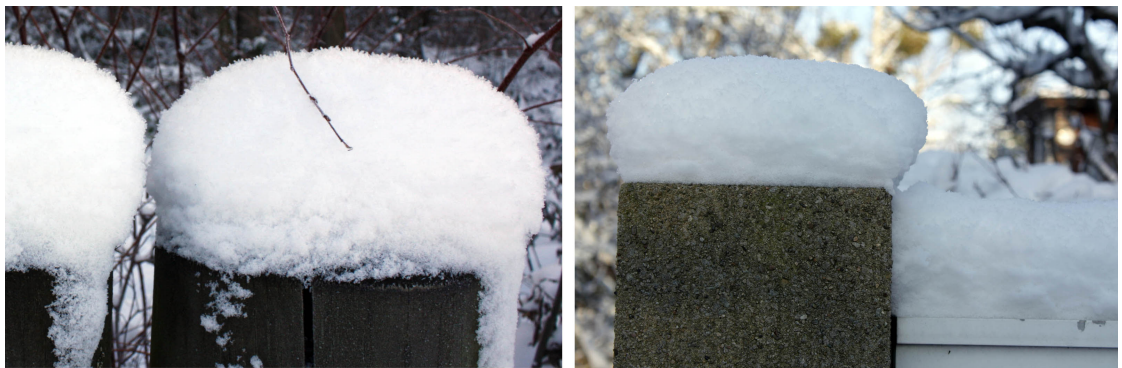


Abbildung A.22.: Beispiele für Überhänge, die sich vermutlich durch Schneealterung bildeten. Schneehöhe ca. 15 cm.



Abbildung A.23.: Schneeüberhänge gebildet durch große Schneeflocken und Temperaturen nahe dem Gefrierpunkt. Schneehöhe ca. 12 cm.



Abbildung A.24.: Schneeüberhänge gebildet durch sehr große Schneeflocken. Schneehöhe 17 cm.

A.6. Nicht modellierte Aspekte



Abbildung A.25.: Sehr kleinräumige Schneebedeckung lässt Formen entstehen, die durch einzelne Schneeflocken geprägt sind, und nicht durch gleichmäßige Mit-
telung. Schneehöhe ca. 1,5 cm.



Abbildung A.26.: Gealterter Schnee kann auf dem Untergrund migrieren und irreguläre
Formen bilden. Schneehöhe ca. 12 cm.



Abbildung A.27.: Bei sehr fein aufgelöstem Untergrund dominiert die Schneeflockenform über die Glättungseigenschaften der Schneedecke. Schneehöhe ca. 2 cm.

A. Beobachtungssammlung natürlicher Schneeformen

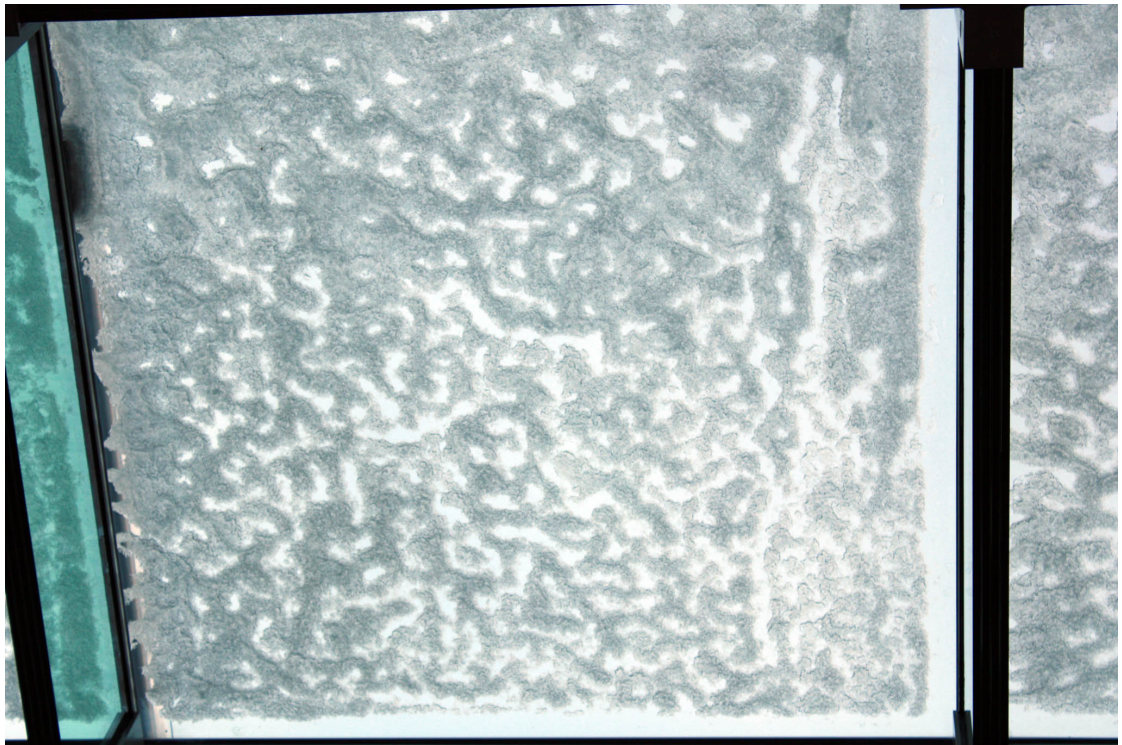


Abbildung A.28.: Partiiell getauter Schnee durch eine Glasscheibe von unten gesehen. Die Formen erscheinen irregulär. Schneehöhe ca. 5 cm.



Abbildung A.29.: Große Schneeflocken können sowohl die Oberfläche als auch Segmentbegrenzung stark verkomplizieren. Schneehöhe ca. 4 cm.

B. Sammlung virtuell beschneiter Szenen

B.1. Distanzfeldmethode

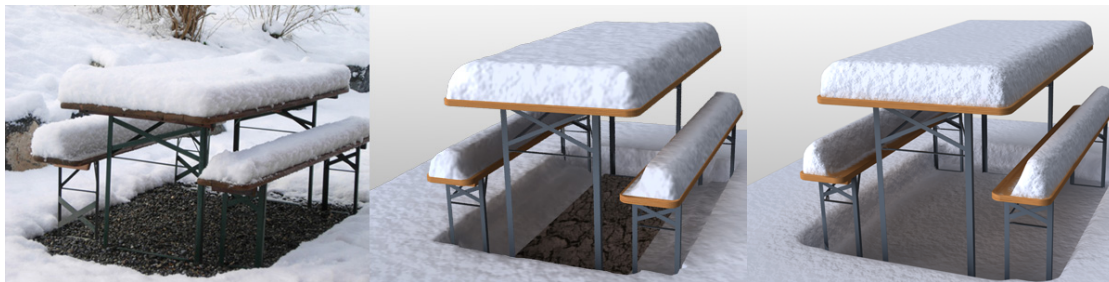


Abbildung B.1.: Bierbank links als Foto und in der Mitte beschneit mit der Distanzfeldmethode. Auflösung 150×104 , $h_{\max} = 0.16$, Berechnungsdauer ohne Rendern 4,0s. Links die gleich Szene mit der Diffusionskernmethode beschneit und mit Randmaske gerendert. Berechnungsdauer zur Schneedeckenerzeugung 1,72 s bei $R = 3\%$.



Abbildung B.2.: Beschneite Landschaft zusammengesetzt aus mehreren separaten Schneedecken. Effektive Auflösung ca. 700×500 , $h_{\max} \approx 0.04$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 6,0s.



Abbildung B.3.: Ein Frame aus einer Beschneiungsanimation mit der Distanzfeldmethode. Auflösung 75×75 , $h_{\max} = 0.15$, Berechnungsdauer ohne Rendern 0,4s.

B.2. Diffusionskernmethode

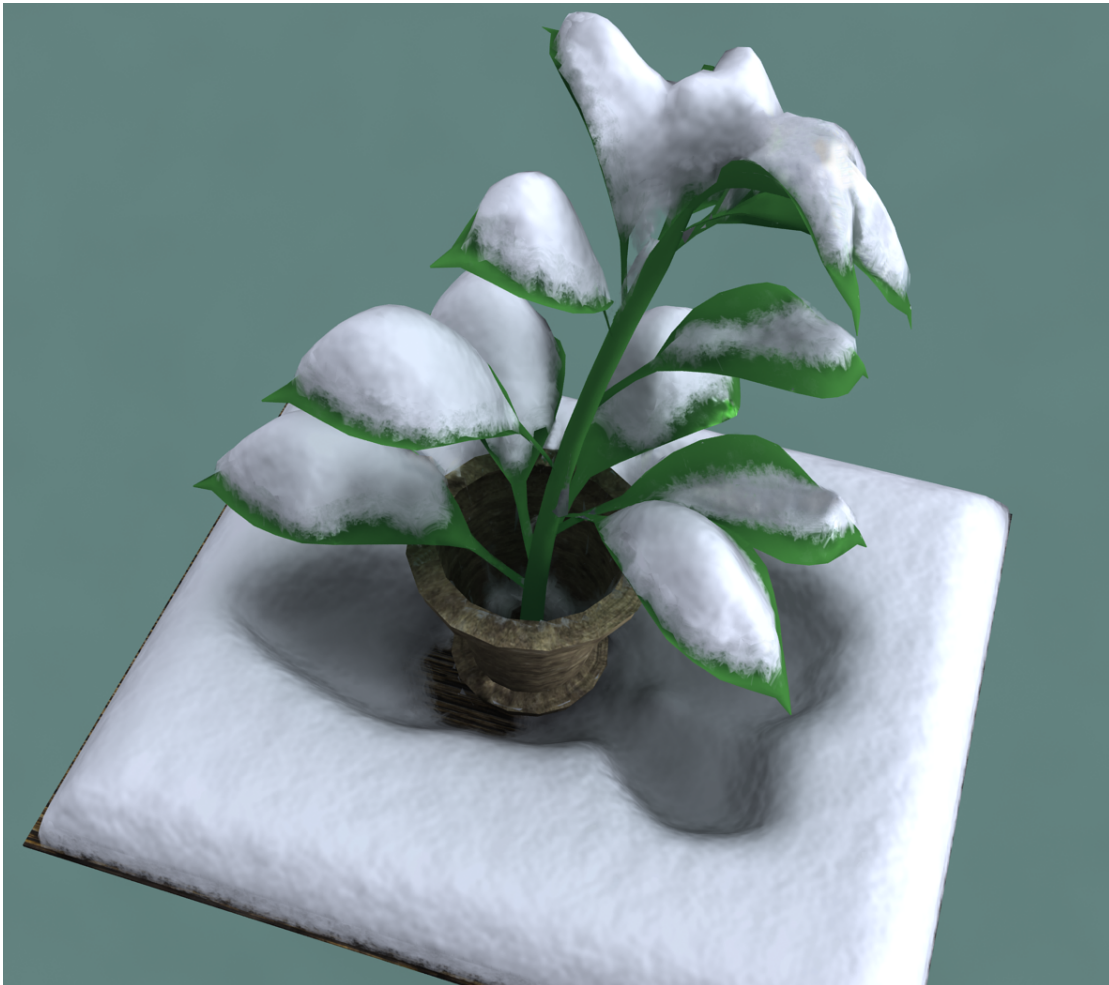


Abbildung B.4.: Referenzmodell der Performanceanalyse. Hier dargestellt in 83×100 Pixeln Tiefentexturauflösung, beschneit mit der Diffusionskernmethode.



Abbildung B.5.: Der Goldene Reiter beschneit mit der Diffusionskernmethode. Auflösung 122×300 , $h_{\max} = 0.03$, $R = 0,05$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 29s.



Abbildung B.6.: Ein beschneiter Hydrant (Diffusionskernmethode), dazwischen ein ungefähres Vergleichsfoto. Auflösung 108×100 , $h_{\max} = 0,05$ bzw. $0,2$, $R = 0,08$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. $6,5s$.

B.3. Brückenbildung und Überhänge

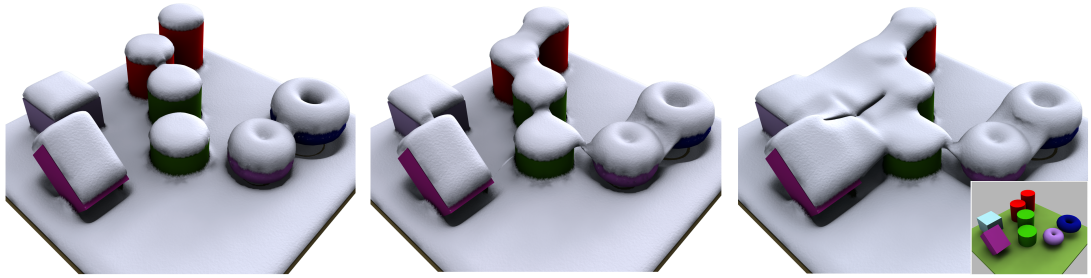


Abbildung B.7.: Variation der maximalen Brückenlänge $b_{\max} = 2.5\%$, 10% und 33% des horizontalen Szenendurchmessers. Berechnungsdauer jeweils ca. 17,6 s.

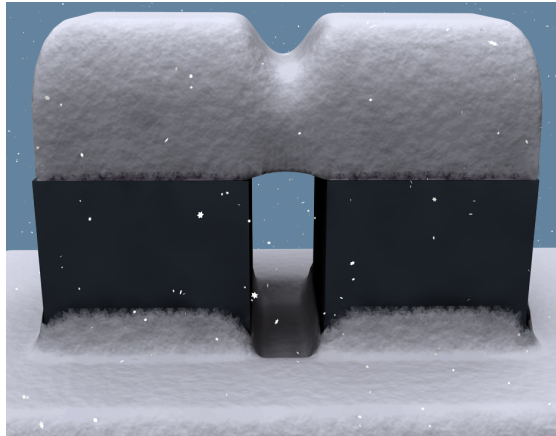


Abbildung B.8.: Beispiel der Brückenbildung für die Diffusionskernmethode. Auflösung 133×200 , $h_{\max} = 0,1$ bzw. $0,2$, $R = 0,05$, $b = 0,25$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 10,8s.

Literaturverzeichnis

- [AL04] AAGAARD, M. ; LERCHE, D.: *Realistic Modelling of Falling and Accumulating Snow*, Aalborg University, Diplomarbeit, 2004
- [AM00] ALEXA, Marc ; MÜLLER, Wolfgang: Representing animations by principal components. In: *Computer Graphics Forum* 19 (2000), Nr. 2, S. 411–418
- [Bar89] BARAFF, D.: Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 23 (1989), Nr. 3, S. 223–232
- [Bar94] BARAFF, David: Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. In: *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, 1994. – ISBN 0–89791–667–0, S. 23–34
- [BHTF07] BAO, Zhaosheng ; HONG, Jeong-Mo ; TERAN, Joseph ; FEDKIW, Ronald: Fracturing Rigid Materials. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 13 (2007), Nr. 2, S. 370–378
- [Bli77] BLINN, James F.: Models of light reflection for computer synthesized pictures. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 11 (1977), Nr. 2, S. 192–198. – ISSN 0097–8930
- [Bli78] BLINN, James F.: Simulation of wrinkled surfaces. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 12 (1978), Nr. 3, S. 286–292
- [Blo91] Kap. Propaganda and active measures In: BLOOM, Richard W.: *Handbook of Military Psychology*. Verlag John Wiley, 1991, S. 693–710
- [Bon82] LE BON, Gustave: *Psychologie der Massen*. 15. dt. Auflage (Frz. Original 1. Aufl. 1895). Kröner Verlag, 1982
- [Bri08] BRIDSON, Robert: *Fluid Simulation for Computer Graphics*. 1. Auflage. Wellesley, Massachusetts, USA : A K Peters, 2008. – ISBN 978–1–56881–326–4
- [BS92] BARABÁSI, Albert-László ; STANLEY, H. E.: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 3. Auflage. Academic Press, 1992
- [BS95] BARABÁSI, Albert-László ; STANLEY, H. E.: *Fractal Concepts in Surface Growth*. 1. Auflage. Cambridge University Press, 1995

- [BWS04] BAKIR, Gökhan H. ; WESTON, Jason ; SCHÖLKOPF, Bernhard: Learning to Find Pre-Images. In: *Advances in Neural Information Processing Systems* 16 (2004), S. 449–456
- [BYM05] BELL, Nathan ; YU, Yizhou ; MUCHA, Peter J.: Particle-based simulation of granular materials. In: *SCA '05: Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*. New York, NY, USA : ACM, 2005, S. 77–86
- [CAA⁺90] COLBECK, S.C. ; AKITAYA, E. ; ARMSTRONG, R. ; GUBLER, H. ; LAFEUILLE, J. ; LIED, K. ; MCCLUNG, D. ; MORRIS, E.: The international classification for seasonal snow on the ground / International Commission on Snow and Ice. 1990. – Forschungsbericht. International Association of Scientific Hydrology
- [Chr06] CHRISMAN, Cameron L.: Rendering Realistic Snow / University of California, San Diego, USA. 2006. – Forschungsbericht. unveröffentlicht
- [CLL⁺05] COIFMAN, Ronald R. ; LAFON, Stéphane ; LEE, Ann B. ; MAGGIONI, Mauro ; NADLER, Boaz ; WARNER, F. ; ZUCKER, Steven W.: Geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and structure definition of data: Multiscale methods. In: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 102 (2005), Nr. 21, S. 7432–7437
- [CS79] CUNDALL, Peter A. ; STRACK, Otto D.: A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. In: *Géotechnique* 29 (1979), Nr. 1, S. 47–65
- [CXW⁺05] CHEN, Yanyun ; XIAN, Lin ; WONG, Tien-Tsin ; TONG, Xin ; BAO, Hujun ; GUO, Baining ; SHUM, Heung-Yeung: Visual simulation of weathering by γ -ton tracing. In: *ACM SIGGRAPH 2005 Papers* (2005), S. 1127–1133
- [DFA04] DIX, Alan J. ; FINLAY, Janet ; ABOWD, Gregory D.: *Human-computer interaction*. 3. Auflage. London : Pearson Prentice-Hall, 2004. – ISBN 0–13–046109–1
- [DJ05] DONNER, Craig ; JENSEN, Henrik W.: Light diffusion in multi-layered translucent materials. In: *SIGGRAPH '05: ACM SIGGRAPH 2005 Papers*, 2005, S. 1032–1039
- [DL05] DEUSSEN, Oliver ; LINTERMANN, B.: *Digital Design of Nature - Computer Generated Plants and Organics*. 1. Auflage. Springer, 2005. – ISBN 978–354040591–7
- [DMSB00] DESBRUN, Mathieu ; MEYER, Mark ; SCHRÖDER, Peter ; BARR, Alan H.: Anisotropic Feature-Preserving Denoising of Height Fields and Bivariate Data. In: *In Graphics Interface*, 2000, S. 145–152
- [DRBR09] DIENER, Julien ; RODRIGUEZ, Mathieu ; BABOUD, Lionel ; REVERET, Lionel: Wind Projection Basis for Real-Time Animation of Trees. In: *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics 2009)* 28 (2009), Nr. 2

- [Dud05] DUDASH, Bryan: Snow Accumulation / NVIDIA Corporation. 2005. – Forschungsbericht. GPU-Implementierung
- [Ebe04] EBERLY, David H.: *Game Physics*. 1. Auflage. Boston, MA, USA : Morgan Kaufmann Publishers, 2004. – ISBN 978-1558607408
- [EE68] ENGELBART, Douglas C. ; ENGLISH, William K.: A research center for augmenting human intellect. In: *AFIPS Conference Proceedings of the 1968 Fall Joint Computer Conference* Bd. 33, 1968, S. 395–410
- [EFFM02] ENRIGHT, Douglas ; FEDKIW, Ronald ; FERZIGER, Joel ; MITCHELL, Ian: A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing. In: *J. Comput. Phys* 183 (2002), S. 83–116
- [EMP⁺98] EBERT, David S. ; MUSGRAVE, F. K. ; PEACHEY, Darwyn ; PERLIN, Ken ; WORLEY, Steven: *Texturing and Modeling: A Procedural Approach*. 2. Auflage. Morgan Kaufman Publishers, 1998. – ISBN 978-0122287305
- [ESK96] ENCARNAÇÃO, José ; STRASSER, Wolfgang ; KLEIN, Reinhard: *Graphische Datenverarbeitung 1*. 4. Auflage. München : R. Oldenbourg Verlag GmbH, 1996
- [EW82] EDWARDS, Samuel F. ; WILKINSON, D. R.: The surface statistics of a granular aggregate. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* 381 (1982), S. 17–31
- [FAMO99] FEDKIW, Ronald P. ; ASLAM, Tariq ; MERRIMAN, Barry ; OSHER, Stanley: A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). In: *J. Comput. Phys.* 152 (1999), Nr. 2, S. 457–492
- [FB07] FOLDES, David ; BENEŠ, Bedřich: Occlusion-Based Snow Accumulation Simulation. In: *VRIPHYS* (2007)
- [FBG09] V. FESTENBERG, Niels ; BLENN, Norbert ; GUMHOLD, Stefan: Powerball: Increasing Immersion of a Stereo Application by Tracking Concretely Reproduced Scene Parts. 2009. – Forschungsbericht. Komplexpraktikum am Lehrstuhl CGV im SoSe 2007
- [FDFH99] FOLEY, James D. ; VAN DAM, Andries ; FEINER, Steven K. ; HUGHES, John F.: *Computer Graphics: Principles and Practice*. 2. Auflage. Boston, Massachusetts, USA : Addison Wesley, 1999
- [Fea00a] FEARING, Paul: Computer Modelling of Fallen Snow. In: *SIGGRAPH '00 Conference Proceedings* (2000), S. 37–46
- [Fea00b] FEARING, Paul: *The Computer Modelling of Fallen Snow*, University of British Columbia, Diss., 2000

- [Fes05] V. FESTENBERG, Niels: *Fernwechselwirkung und zeitliches Treiben in Epidemiemodellen*, Universität Potsdam, Institut für Physik, Lehrstuhl für nicht-lineare Dynamik, Diplomarbeit, 2005
- [FG09] V. FESTENBERG, Niels ; GUMHOLD, Stefan: A Geometric Algorithm for Snow Distribution of Snow in Virtual Scenes. In: *Eurographics Workshop on Natural Phenomena* (2009)
- [FG10] V. FESTENBERG, Niels ; GUMHOLD, Stefan: Diffusion-Based Snow Cover Generation. In: *eingereicht bei Computer Graphics Forum, vorbehaltlich stilistischer Überarbeitung angenommen zur Wiedereinreichung* (2010)
- [FH04] FELZENSZWALB, Pedro F. ; HUTTENLOCHER, Daniel P.: Distance transform of sampled functions / Cornell University. 2004. – Forschungsbericht. TR2004-1963
- [Fla99] FLAKE, Gary W.: *The Computational Beauty of Nature*. 2. Auflage. Cambridge, Massachusetts, USA : The MIT Press, 1999
- [Flu07] FLUSSER, Vilém: *Kommunikologie*. 4. Auflage. Frankfurt a. M. : Fischer Taschenbuch, 2007. – ISBN 3596133890
- [FM96] FOSTER, Nick ; METAXAS, Dimitri: Realistic animation of liquids. In: *Graph. Models Image Process.* 58 (1996), Nr. 5, S. 471–483
- [FM97] FOSTER, Nick ; METAXAS, Dimitris: Modeling the motion of a hot, turbulent gas. In: *SIGGRAPH '97: Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, 1997. – ISBN 0–89791–896–7, S. 181–188
- [FO02] FELDMAN, Bryan E. ; F. O'BRIEN, James: Modelling the Accumulation of Wind-driven Snow. In: *Conference Abstracts and Applications SIGGRAPH* (2002)
- [Gei09] GEISEL, Theo: Dem Geld auf der Spur. In: *Physik Journal* 8 (2009), S. 51–56
- [GM81] GRAY, D. M. ; MALE, D. H.: *Handbook of snow: principles, processes, management and use*. 1. Auflage. Pergamon Press, 1981
- [GS08] GUMHOLD, Stefan ; SCHRÖDER, Michael. *DFG-SPP 1335 Visual Analytics, Zoomable Cell Project*. 2008
- [Gum96] GUMHOLD, Stefan: *Mesh Compression*, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, Diss., 1996
- [GV95] GOMES, Jonas ; VELHO, Luiz: Abstraction paradigms for computer graphics. In: *The Visual Computer* 11 (1995), Nr. 5, S. 227–239

- [HAH02] HAGLUND, Håkan ; ANDERSSON, Matthis ; HAST, Anders: Snow Accumulation in Real-time. In: *SIGGRAD* (2002)
- [Hau97] HAUG, Hartmut: *Statistische Physik - Gleichgewichtstheorie und Kinetik*. 1. Auflage. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1997
- [Haw04] HAWKINS, Tim: Modelling from multiple photographs using points and silhouettes. In: *SIGGRAPH '04: ACM SIGGRAPH 2004 Posters*, 2004, S. 53
- [Häc93] HÄCKEL, Hans: *Meteorologie*. 1. Auflage. Verlag Eugen Ulmer, 1993
- [Her97] HERMAN, Leonard: *Phoenix - The Fall and Rise of Home Videogames*. 2. Auflage. Rolenta Press, 1997
- [HKW09] HABEL, Ralf ; KUSTERNIG, Alexander ; WIMMER, Michael: Physically Guided Animation of Trees. In: *Proceedings of the Eurographics 2009*, 2009
- [HT02] HIRONORI, Moriki ; TOKOI, Kohe: Real-time simulation of the fallen snow with consideration to the irregular motion of the snow. In: *Joho Shori Gakkai Kenkyu Hokoku* (2002), Nr. 77, S. 109–114
- [Itô92] ITÔ, Seizô: *Diffusion Equations*. 1. Aufl. American Mathematical Society, 1992. – ISBN 978-0821845707
- [JF03] JAMES, Doug L. ; FATAHALIAN, Kayvon: Precomputing interactive dynamic deformable scenes. In: *ACM Trans. Graph.* 22 (2003), Nr. 3, S. 879–887
- [KAL06] KIM, Theodore ; ADALSTEINSSON, David ; LIN, Ming C.: Modeling ice dynamics as a thin-film Stefan problem. In: *SCA '06: Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation* (2006), S. 167–176
- [Kei85] KEIDEL, Wolf-Dieter (Hrsg.): *Kurzgefasstes Lehrbuch der Physiologie*. 6. Auflage. 1985
- [KFCO06] KLINGNER, Bryan M. ; FELDMAN, Bryan E. ; CHENTANEZ, Nuttapong ; O'BRIEN, James F.: Fluid animation with dynamic meshes. In: *ACM Trans. Graph.* 25 (2006), Nr. 3, S. 820–825
- [KK89] KAJIYA, J. T. ; KAY, T. L.: Rendering fur with three dimensional textures. In: *ACM SIGGRAPH Comput. Graph.* 23 (1989), Nr. 3, S. 271–280
- [KPZ86] KARDAR, Mehran ; PARISI, Giorgio ; ZHANG, Yi-Cheng: Dynamic scaling of growing interfaces. In: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), S. 889–892
- [KRFC09] KRY, Paul ; REVÉRET, Lionel ; FAURE, François ; CANI, Marie-Paule: Modal locomotion: animating virtual characters with natural vibrations. In: *Comput. Graph. Forum* 28 (2009), Nr. 2, S. 289–298. – Special Issue: Eurographics 2009

- [KRN97] KANADE, Takeo ; RANDEr, Peter ; NARAYANAN, P. J.: Virtualized Reality: Constructing Virtual Worlds from Real Scenes. In: *IEEE MultiMedia* 4 (1997), Nr. 1, S. 34–47
- [KSW04] KIPFER, Peter ; SEGAL, Mark ; WESTERMANN, Rüdiger: ÜberFlow: a GPU-based particle engine. In: *HWWS '04: Proceedings of the ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS conference on Graphics hardware*, 2004, S. 115–122
- [Kuh87] KUHN, Michael: Micro-meteorological conditions for snow melt. In: *Journal of Glaciology* 33 (1987), Nr. 113, S. 24–26
- [KZ89] KARDAR, Mehran ; ZHANG, Yi-Cheng: Transfer matrix simulations of 2d-interfaces in three-dimensional random media. In: *Europhys. Lett.* 8 (1989), Nr. 3, S. 233–238
- [KZ04] KOKHANOVSKY, Alexander A. ; ZEGER, Eleonora P.: Scattering Optics of Snow. In: *Appl. Opt.* 43 (2004), Nr. 7, S. 1589–1602
- [Lat08] LATHAN, Maik: *GPU-basierte Simulation dynamischer Terrains*, Professur Computergraphik und Visualisierung, TU Dresden, Diplomarbeit, 2008
- [LBB⁺99] LEHNING, Michael ; BARTELT, Perry ; BROWN, Bob ; RUSSI, Tom ; STÖCKLI, Urs ; ZIMMERLI, Martin: SNOWPACK model calculations for avalanche warning based upon a new network of weather and snow stations. In: *Cold Regions Science and Technology* 30 (1999), Nr. 13, S. 145–157
- [Leh08] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie*. 6. Auflage. Kröner Verlag, 2008
- [LGG⁺07] LU, Jianye ; GEORGHIADES, Athinodoros S. ; GLASER, Andreas ; WU, Hongzhi ; WEI, Li-Yi ; GUO, Baining ; DORSEY, Julie ; RUSHMEIER, Holly: Context-aware textures. In: *ACM Trans. Graph.* 26 (2007), Nr. 1, S. 3
- [LIG06] LOSASSO, Frank ; IRVING, Geoffrey ; GUENDELMAN, Eran: Melting and Burning Solids into Liquids and Gases. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 12 (2006), Nr. 3, S. 343–352. – Member-Fedkiw, Ron
- [Liu10] LIU, Fei: An Illumination Model for Realistic Rendering of Snow Surfaces / Uppsala Universitet, Schweden. 2010. – Forschungsbericht. unveröffentlicht
- [Los76] LOSCHMIDT, Johann: Über den Zustand des Wärmegleichgewichts eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft II. In: *Sitzungsber. der kais. Akad. d. W. i. W.* 73 (1876), Nr. 128
- [LP00] LAUGHLIN, Robert B. ; PINES, David: The Theory of Everything. In: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 97 (2000), Nr. 1, S. 28–31

- [LZK⁺04] LANGER, Michael S. ; ZHANG, Linqiao ; KLEIN, A.W. ; BHATIA, A. ; PEREIRA, J. ; REKHI, D.: A spectral-particle hybrid Method for Rendering Falling Snow. In: *Eurographics Symposium on Rendering* (2004)
- [Man83] MANDELBROT, Benoit B.: *The Fractal Geometry of Nature*. 1. Auflage. W.H. Freeman, 1983. – ISBN 978–0716711865
- [May00] MAYER, Horst O.: *Einführung in die Wahrnehmungs-, Lern- und Werbe-Psychologie*. 1. Auflage. R. Oldenburg Verlag, 2000
- [MC00] MURAOKA, Kazunobu ; CHIBA, Norishige: Visual Simulation of Snowfall, Snow Cover and Snowmelt. In: *ICPADS '00* (2000), S. 187. ISBN 0769505716
- [Mel74] MELLOR, M.: A Review of Basic Snow Mechanics. In: *Proceedings of the Grindelwald Symposium, IAHS Publication No. 114*, 1974
- [MFC06] MATSUYAMA, Katsutsugu ; FUJIMOTO, Tadahiro ; CHIBA, Norishige: Real-time animation of spark discharge. In: *The Journal of Visual Computer* 22 (2006), Nr. 9-11, S. 761–771
- [MG08] MERILLOU, Stéphane ; GHAZANFARPOUR, Dhamchid: A survey of aging and weathering phenomena in computer graphics. In: *Computers & Graphics* 32 (2008), Nr. 2, S. 159 – 174
- [MM52] MIDDLETON, W. E. K. ; MUNGALL, A. G.: The Luminous Directional Reflectance of Snow. In: *J. Opt. Soc. Am.* 42 (1952), S. 572–579
- [MMAL05] MOESLUND, T.B. ; MADSEN, C.B. ; AAGAARD, M. ; LERCHE, D.: Modeling Falling and Accumulating Snow. In: *Vision, Video and Graphics* (2005)
- [Mor70] MORI, Masahiro: Bukimi no tani /The uncanny valley (K. F. MacDorman und T. Minato, Trans.). In: *Energy* 7 (1970), Nr. 4, S. 33–35
- [Nak54] NAKAYA, Ukichiro: *Snow Crystals: Natural and Artificial*. 1. Auflage. Harvard University Press, 1954
- [New87] NEWTON, Sir I.: *Philosophia Naturalis Principa Naturalis*. 1. Auflage. Royal Society, 1687
- [NIDN97] NISHITA, Tomoyuki ; IWASAKI, Hiroshi ; DOBASHI, Yoshinori ; NAKAMAE, Eihachiro: A Modeling and Rendering Method for Snow by Using Metaballs. In: *Proc. EUROGRAPHICS* 16 (1997)
- [Nor98] NORMAN, Donald A.: *The Invisible Computer: Why Good Products Can Fail, the Personal Computer Is So Complex, and Information Appliances Are the Solution*. 1. Auflage. Cambridge, Massachusetts, USA : The MIT Press, 1998. – ISBN 978–0262640411

- [NWD07] NEIDHOLD, Benjamin ; WACKER, Markus ; DEUSSEN, Oliver: Interactive physically based Fluid and Erosion Simulation. In: *ACM Eurographics Workshop on Natural Phenomena* (2007)
- [OBW⁺08] ORZAN, Alexandrina ; BOUSSEAU, Adrien ; WINNEMÖLLER, Holger ; BARLA, Pascal ; THOLLOT, Joëlle ; SALESIN, David: Diffusion curves: a vector representation for smooth-shaded images. In: *ACM Trans. Graph.* 27 (2008), Nr. 3, S. 1–8
- [ON05] ONOUE, Koichi ; NISHITA, Tomoyuki: An Interactive Deformation System for Granular Material. In: *Computer Graphics Forum* 24 (2005), Nr. 1, S. 51–60
- [OS04] OHLSSON, Per ; SEIPEL, Stefan: Real-time Rendering of Accumulated Snow. In: *SIGGRAPH* (2004)
- [Pat94] PATERSON, W.S.B.: *The Physics of Glaciers*. 3. Auflage. Butterworth-Heinemann, 1994. – ISBN 0750647426
- [Pea86] PEACHEY, Darwyn R.: Modeling waves and surf. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 20 (1986), Nr. 4, S. 65–74
- [Pik03] PIKOVSKI, Arkadi. *Stochastische Prozesse und Statistische Methoden*. Vorlesungskript, Universität Potsdam. 2003
- [Pos86] POSTMAN, Neil: *Amusing Ourselves to Death: Public Discourse in the Age of Show Business*. 1. Auflage. Penguin, 1986. – ISBN 978-0140094381
- [Pro95] PROVOT, Xavier: Deformation Constraints in a Mass-Spring Model to Describe Rigid Cloth Behavior. In: *Graphics Interface '95* (1995), S. 147–154
- [PTS99] PREMOŽE, Simon ; THOMPSON, William B. ; SHIRLEY, Peter: Geospecific rendering of alpine terrain. In: *In Eurographics Workshop on Rendering*, 1999, S. 107–118
- [RBF08] RAMANARAYANAN, Ganesh ; BALA, Kavita ; FERWERDA, James A.: Perception of complex aggregates. In: *ACM Trans. Graph.* 27 (2008), Nr. 3, S. 1–10. – ISSN 0730-0301
- [Ree83] REEVES, William T.: Particle Systems—a Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects. In: *ACM Trans. Graph.* 2 (1983), Nr. 2, S. 91–108
- [RU09] RUTGERS UNIVERSITY, Global Snow L. *Zeitreihe der nordhemisphärischen Schneeausdehnung 1966-2008*. <http://climate.rutgers.edu/snowcover/>. November 2009
- [RW94] REED, Todd ; WYVILL, Brian: Visual simulation of lightning. In: *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA : ACM, 1994, S. 359–364

- [RWD05] REINHARD, Erik ; WARD, Greg ; ; DEBEVEC, Sumanta Pattanaik P.: *High Dynamic Range Imaging.: Acquisition, Display, and Image-Based Lighting*. 1. Aufl. Morgan Kaufmann Publishers, 2005
- [SEN06] SALTVIK, Ingar ; ELSTER, Anne C. ; NAGEL, Henrik R.: Parallel Visualization of Snow. In: *PARA (State of the Art in Scientific and Parallel Computing)* (2006)
- [Shi05] SHIRLEY, Peter: *Fundamentals of Computer Graphics*. 2. Auflage. Wellesley, Massachusetts, USA : A K Peters, Ltd., 2005
- [Sho85] SHOEMAKE, Ken: Animating rotation with quaternion curves. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 19 (1985), Nr. 3
- [SLK04] SHUM, Heung Y. ; LI, Yin ; KANG, Sing B.: An introduction to image-based rendering. (2004), S. 131–159
- [SMS99] SCHÖLKOPF, Bernhard ; MÜLLER, Klaus-Robert ; SMOLA, Alexander J.: Lernen mit Kernen : Support-Vektor-Methoden zur Analyse hochdimensionaler Daten. In: *Informatik Forsch. Entw.* 14 (1999), S. 154–163
- [SOH99] SUMNER, Robert W. ; O'BRIEN, James F. ; HODGINS, Jessica K.: Animating Sand, Mud, and Snow. In: *Computer Graphics Forum* 18 (1999), Nr. 1, S. 17–26
- [Spa04] SPAHN, Frank. *Nichtgleichgewichtsthermodynamik*. Vorlesungsskript, Universität Potsdam. 2004
- [SSP07] SOLENTHALER, Barbara ; SCHLÄFLI, Jürg ; PAJAROLA, Renato: A unified particle model for fluid–solid interactions: Research Articles. In: *Comput. Animat. Virtual Worlds* 18 (2007), Nr. 1, S. 69–82
- [Sta95] STAM, Jos: *Multi-Scale Stochastic Modelling of Complex Natural Phenomena*, University of Toronto, Diss., 1995
- [Sta99a] STAM, Jos: Diffraction shaders. In: *SIGGRAPH '99: Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, 1999, S. 101–110
- [Sta99b] STAM, Jos: Stable fluids. In: *SIGGRAPH '99: Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, 1999, S. 121–128
- [Sto05] STOFFEL, Martin: *Numerical Modelling of Snow Using Finite Elements*, ETH Zürich, Diss., 2005
- [Sut63] SUTHERLAND, I.E.: Sketchpad: A Man-Machine Graphical Communication System. In: *AFIPS Conference proceedings of the Spring Joint Computer Conference* Bd. 23, 1963

- [TF88] TERZOPOULOS, Demetri ; FLEISCHER, Kurt: Modeling inelastic deformation: viscoelasticity, plasticity, fracture. In: *SIGGRAPH '88: Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. New York, NY, USA : ACM, 1988, S. 269–278
- [TLP06] TREUILLE, Adrien ; LEWIS, Andrew ; POPOVIĆ, Zoran: Model reduction for real-time fluids. In: *ACM Trans. Graph.* 25 (2006), Nr. 3, S. 826–834
- [Tok06] TOKOI, Kohe: A shadow buffer technique for simulating snow-covered shapes. In: *In CGIV '06: Proceedings of the International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualisation* (2006), S. 310–316
- [TPBF87] TERZOPOULOS, Demetri ; PLATT, John ; BARR, Alan ; FLEISCHER, Kurt: Elastically deformable models. In: *ACM SIGGRAPH '87: Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (1987), S. 205–214
- [TS67] TORRANCE, K.E. ; SPARROW, E.M.: Theory for Off-Specular Reflection From Roughened Surfaces. In: *J. Opt. Soc. Am.* (1967), S. 1105–1112
- [Tur91] TURK, Greg: Generating textures on arbitrary surfaces using reaction-diffusion. In: *SIGGRAPH '91: ACM SIGGRAPH 1991 Papers*, 1991, S. 289–298
- [TZWZ09] TAN, Yao ; ZHANG, Xiangjuan ; WANG, Chunyan ; ZHAO, Qiao: Real-Time Snowing Simulation Based on Particle Systems. In: *International Workshop on Education Technology and Computer Science* 3 (2009), S. 7–11
- [Ung97] UNGERER, Theo: *Parallelrechner und parallele Programmierung*. 1. Auflage. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 1997. – ISBN 382740231X
- [VC07] VENETILLO, Jeronimo S. ; CELES, Waldemar: GPU-based Particle Simulation With Inter-Collisions. In: *The Visual Computer* 23 (2007), Nr. 9-11, S. 851–860
- [VCC03] VELHO, Luiz ; CEZAR, Paulo ; CARVALHO, Pinto: Mathematical Optimization in Graphics and Vision. In: *SIGGRAPH Course Notes*, 2003
- [War82] WARREN, Stephen G.: Optical Properties of Snow. In: *Rev. Geophys.* 20 (1982), Nr. 1, S. 67–89
- [WCMT07] WOJTAN, Chris ; CARLSON, Mark ; MUCHA, Peter J. ; TURK, Greg: Animating Corrosion and Erosion. In: *ACM Eurographics Workshop on Natural Phenomena* (2007)
- [Wei86] WEIL, Jerry: The synthesis of cloth objects. In: *SIGGRAPH Comput. Graph.* 20 (1986), Nr. 4, S. 49–54

- [Wig60] WIGNER, Eugene P.: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. In: *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), Nr. 1
- [WWXP06] WANG, Changbo ; WANG, Zhangye ; XIA, Tian ; PENG, Qunsheng: Real-time snowing simulation. In: *Vis. Comput.* 22 (2006), Nr. 5, S. 315–323
- [Yeh85] YEHODA, Russel Messier Joseph E.: Geometry of thin-film geometry. In: *J. Appl. Phys.* 58 (1985), Nr. 10, S. 3739 – 3746
- [ZB05] ZHU, Yongning ; BRIDSON, Robert: Animating sand as a fluid. In: *SIGGRAPH '05: ACM SIGGRAPH 2005 Papers*. New York, NY, USA : ACM, 2005, S. 965–972
- [Zim76] Kap. Kybernetische Aspekte des Nervensystems und der Sinnesorgane In: ZIMMERMANN, Manfred: *Physiologie des Menschen*. 18. Auflage. Springer-Verlag, 1976, S. 303–315

Abbildungsverzeichnis

3.1.	Abgewandelt nach [VCC03]: Der Realitätsgrad einer computergraphischen Modellierung lässt sich als Ähnlichkeit zwischen der direkter oder mess-technisch vermittelter Wahrnehmung und der Wahrnehmung der Computerausgabe definieren.	18
3.2.	Arbeitsklassifikation zur Übersicht über die computergraphisch modellierbaren natürlichen Phänomene.	26
4.1.	Links: Schneebedeckung der nördlichen Hemisphäre in den Jahren 1972-2008. Die dicke schwarze Linie ist der wöchentliche Durchschnitt gemittelt über alle Jahre. Die Daten stammen vor allem aus satellitengestützten Schätzungen. Links: Ein Beispiel für die Eingangsdaten vom 3. November 2009. Quelle: [RU09]	35
4.2.	Schneeflockenformen nach [Nak54].	37
4.3.	Eine Schneedecke bildet sich. Die Aufnahmen entstanden zwischen 9:00 Uhr und 16:00 Uhr am 16. Januar 2008 in Locarno. Quelle: Webcam auf www.webticino.ch	39
4.4.	Typische Randprofile der Schneebedeckung und Untergrundglättungen . .	40
4.5.	Schneeablagerungsformen bei Bodentemperaturen deutlich über 0°C (links), bei sehr großen Schneeflocken (Mitte) und bei hohen Windgeschwindigkeiten (rechts, man beachte den Schneehöhenunterschied links und rechts von der Lokomotive.)	40
4.6.	Links: Detail einer Schneeflocke, Bildsenkrechte ca. 2 mm. Rechts: Schneekompaktifizierung. Oben: Skizze der diffusiven lokalen Schneeflockenumkristallisation. Unten: CT-Aufnahme eines realen Schneesegmentes direkt nach dem Schneefall und nach 23 Tagen bei -3°C. Quelle: Schweizer Institut für Schnee- und Lawinenforschung.	41
4.7.	Links: Sogenannter Büßerschnee, der durch sonnenbedingte Verdunstung des Schnees bei Lufttemperaturen unter null Grad entstand. Rechts: Windbedingte Schneedrift im Gegenlicht. Man beachte die Ausreizung des Helligkeitsspektrums der Aufnahme.	42
4.8.	Interaktive Schneeaspekte Schneefall und induzierte Kompaktifizierung. .	43
4.9.	Tauender Schnee. Quellen: wetteronline.de und wetter-foto.de	44
5.1.	Gerenderte Schneeoberflächen aus [NIDN97], [MC00], [Chr06] und [OS04].	46
5.2.	Virtuelle Schneeformen. Oben: [NIDN97], [MC00] und [Tok06]. Unten: [HAH02], [Fea00a] und [Dud05].	47
5.3.	Virtuelle Fernansichten beschneiter Landschaften aus [PTS99] und [FB07].	48

5.4.	Virtueller Schneefall aus [AL04] und [LZK ⁺ 04]	49
5.5.	Lokale Schneeumlagerung. Oben: [Fea00a] und [FO02]. Unten: virtueller Fußabdruck im Schnee [SOH99], Einzelbild ganz rechts [WWXP06].	51
6.1.	Links: Koch'sche Schneeflocke, benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch. Sie entsteht durch iterative Drittelung und Rekombination einer Strecke. Mitte: Detail der fraktalen Oberfläche von pyrolithischem Graphit aus [Yeh85], die mit einer KPZ-Gleichung 6.14 beschrieben werden kann. Kantenlänge ca. 2 mm. Trotz des andersartigen Entstehungsprozesses zeigen sich selbstähnliche Strukturen, die deutlich an Schneeoberflächen erinnern (rechts).	62
6.2.	Ein zweidimensionales Reaktionsdiffusionssystem als Monte-Carlo-Simulation angepasst auf Schnee nach Gl. (6.17). Links: Grau der Szenenuntergrund, in Rot die Schneefalldichten $\rho = 0, 75, 1$ und $0,5$; Rechts: Entwicklung der Schneefalldichte S in Blaustufen. 100 Simulationsschritte auf 256×256 Zellen.	65
7.1.	Mathematische Lösungskurven für das Schneerandprofil nach den Gl. (7.22) und (7.23). Zum Vergleich siehe ein reales Schneerandprofil in Abb. 4.3.	73
8.1.	Die Beschneigung einer glatten, unverdeckten und einseitig begrenzten Fläche lässt sich in sehr guter Näherung als diffusives Wachstum beschreiben und mathematisch als Faltung mit einem Gaußkern ausführen, der die Randbedingungen einhält (siehe 7.2.1 und Gl. (7.11)). Schneehöhe im Foto rechts ca. 10 cm aus Neuschnee. Weitere Beispiel in Anhang A.1	77
8.2.	Der Diffusionsansatz erklärt die Verminderung der Maximalschneehöhe auf sehr kleinen Grundflächen: Der Gaußkern passt nicht mehr vollständig darauf. Das Foto rechts zeigt die rechte Angel eines Gartentores, mit maximal ca. 10 cm Pulverschnee darauf (Neuschnee, der bei mäßigem Dauerfrost 3 Tage gealtert ist). Weitere Beispiele in Anhang A.3.	78
8.3.	Vertikale Verdeckung lässt sich mit dem Diffusionskern ausdrücken, indem nur der unverdeckte Teil des Kernes zur Aufaddierung der Schneehöhe verwendet wird. Im verdeckten Teil entsteht dann ein Schneeprofil, das der vollen Error-Funktion entspricht. Schneehöhe im Foto rechts ca. 7 cm.	79
8.4.	Kleinere Untergrundunebenheiten werden durch den Diffusionskern geglättet. Große Sprünge bleiben bei zu geringer Schneehöhe auch in der Schneebedeckung erhalten. Siehe dazu auch Anhang A.4. Maximale Schneehöhe auf den Fotos jeweils ca. 10 cm.	80
8.5.	Das Prinzip der Schneebrückenbildung lässt sich als stetige Fortsetzung eines Diffusionsprozesses über Spalten hinweg verstehen. Rechts eine günstige Konstellation zur Verdeutlichung des Brückenbildungsprozesses: Der verdeckungsbedingte Schneehöhengradient zeigt, dass Untergrunddiskontinuitäten mit zunehmender Schneehöhe immer leichter überbrückt werden. Maximale Schneehöhe im Foto ca. 18 cm.	81

8.6.	a. Die Höhengspannenkarte enthält die Szenengeometrie in Form einer regelmäßigen Abtastung in Vertikalrichtung. b. Die Höhengspannendaten werden aus der Szenengeometrie durch schichtweises Auslesen des z-Puffers der Graphikkarte gewonnen (sog. <i>depth peeling</i>).	82
8.7.	Gesamtablauf der Distanzfeldmethode zur virtuellen Beschneigung. (A) Das unbeschneite Ausgangsmodell. (B) Das Modell als Höhengspannenkarte. (C) Die segmentierte Höhengspannenkarte. (D) Die Höhengspannenkartensegmente mit lokaler Randentfernung. (E) Das Ausgangsmodell mit triangulierter Schneeoberfläche darauf.	83
8.8.	Berechnung der Schneehöhe nach der Distanzfeldmethode.	84
8.9.	Zwischenzustände der Schneeoberflächenerzeugung mit der Distanzfeldmethode. Für einfache Geometrien (links) liefert die Methode korrekte Ergebnisse, für kompliziertere mit verschachtelten Verdeckungs- und Segmentaufteilungen nähert sie realistische Verhältnisse nur unvollständig an (Teekanne rechts).	85
8.10.	Ergebnis der virtuellen Beschneigung nach der Distanzfeldmethode (Mitte) im Vergleich zu einem realen Schneefoto (links) aus [FG09]. Die Vergrößerung zeigt die Auswirkung eines Innenrandes. Tiefentexturauflösung 187×300 , $h_{\max} = 0.065$, $\alpha_{\max} = 80^\circ$, Berechnungsdauer 1,7 s. Zum Vergleich rechts die gleiche Szene beschneit mit der Diffusionskernmethode gerendert mit Randmaske. Berechnungsdauer zur Erzeugung der Schneedecke dort 11,05 s bei $R = 2,5\%$	86
8.11.	Rechenleistung der Distanzfeldmethode in Abhängigkeit von der Schneestützstellenanzahl für einen AMD Athlon 64x2 3800+ mit 2,01 GHz als CPU bei 1 GB Ram und einer NVIDIA GeForce 8800 GTS als GPU. Als Referenzmodell wurde das in Abb. B.4 dargestellt Modell verwendet, wobei 10776 Schneeplätze einer Tiefentexturauflösung von 83×100 entspricht.	87
8.12.	Ablauf der Diffusionskernmethode. Der dargestellte Diffusionskern entspricht der numerisch günstigen Form (8.9).	88
8.13.	Diffusionskernauswertung. c ist die Schneekapazität, d.h. die freie Höhe über einer Schneestützstelle, Δz die Höhendifferenz zwischen zwei Stützstellen, R der Kernradius und r der lokale Randabstand. Genauere Erläuterungen im Text	90
8.14.	Die Lévy-Verteilung im Gegensatz zu Normalverteilung (aus [Gei09]) in willkürlichen Einheiten. Die Gewichtung des Nahbereichs bei der Lévy-Verteilung verbessert die Einhaltung der Randbedingungen bei der Schneedeckenerzeugung.	91
8.15.	Auswahlkriterien der Kernmitglieder von K_p . Die erste Wahl ist durch die minimale Höhendifferenz Δz_{\max} gegeben (Fall 1). Details für die weiteren Fälle im Text.	93

8.16. Rohergebnisse erzeugt mit der Diffusionskernmethode. Man erkennt die realistische Wiedergabe der vertikalen Verdeckung und die korrekte Überdeckung kleinerer Details am Griff des Teekannendeckels. Der schmale Spalt zwischen Deckel und Kanne führt ohne Brücken jedoch noch nicht zu einem optimalen Ergebnis.	94
8.17. Beschneigung mit der Diffusionskernmethode gerendert mit globaler Beleuchtung: ein beschneites Modell des Goldenen Reiters zusammen mit einem Referenzfoto. Auflösung 102×250 , Kerngröße 0,05 % des Szenendurchmessers, Berechnungsdauer zur Schneedeckenerzeugung 4654 ms (Rechner wie in Abb. 8.10). Rohdaten des Reiters aus Laserscandaten von Prof. H.-G. Maas, fertige 3D-Modellierung C. Schubert.	95
8.18. Performanz der Diffusionskernmethode. Referenzmodell wie in 8.11. . . .	96
8.19. Skizze zur Brücken- und Überhangerzeugung. Details im Text.	98
8.20. Die Randfunktion $g_2(r)$ aus (8.14) für Brücken und Überhänge, jeweils ohne Skalierung (also $c = 1$).	99
8.21. Rohergebnisse der Beschneigung mit der Diffusionskernmethode mit Brücken und Überhängen. Während links kein deutlicher Unterschied zu sehen ist, zeigt sich die visuelle Verbesserung durch Brücken am Teekannendeckel rechts deutlich (vgl. Abb. 8.16).	100
8.22. Gerenderte Ergebnisse von links nach rechts: ohne Brücken, mit Brücken ($c_{\text{Brücke}} = 0,5$), mit Brücken und Überhängen ($c_{\text{Brücke}} = 0,5$, $c_{\text{Überhang}} = 1$). Auflösung 258×200 , Rechenzeit zur Schneenetzerzeugung jeweils ca. 23 s.	100
8.23. Szene aus B.4 im Methodenvergleich, jeweils 83×100 Pixel als Tiefentexturauflösung. Links: Distanzfeldmethode gerendert ohne Randmaske, Geometrieerzeugungsdauer 0,65 s. Rechts: Diffusionskernmethode gerendert mit Randmaske, Geometrieerzeugungsdauer inkl. Texturierung 2,36 s.	101
8.24. Erzeugung von Gold- und Grasbedeckungen mit dem Schneemodellierungsalgorithmus durch Austausch der Texturierung.	102
9.1. Rendern von Schneeoberflächen mit 3D-Perlin Rauschen als Bump-Mapping. Links zum Vergleich ein Foto einer realen Szene.	104
9.2. Per Spiegelung verdoppeltes Graustufenfoto des Auflagebereiches realer Schneebedeckung. Reale vertikale Länge des Ausschnitts: ca. 3 cm. . . .	104
9.3. Schnee mit und ohne Alphamaske am Rand.	105
9.4. Gerenderte Randschleifen zu den Abbildungen B.4 und B.5.	106
A.1. Ein einzelnes Schneesegment in Nahaufnahme. Maximalschneehöhe ca. 5 cm.	109
A.2. Zwei Schneesegmente mit unterschiedlicher Randsteilheit.	110
A.3. Randprofile bei geneigtem Untergrund.	110
A.4. Mehrere Randprofile aus der Ferne betrachtet zeigen ein sehr homogenes Erscheinungsbild.	110

A.5. Drei Beispiele kleinräumiger, vertikaler Verdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 15 cm.	111
A.6. Zwei Beispiele mittlerer vertikaler Verdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.	111
A.7. Vertikal sehr weiträumige Verdeckung mit flachem Schneehöhenabfall in die Verdeckung hinein. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.	112
A.8. Breite, mittelhohe und weiträumige Vertikalverdeckung. Schneehöhe jeweils ca. 18 cm.	112
A.9. Schneebedeckung glättet rechteckigen Untergrund. Schneehöhe ca. 12 cm.	113
A.10. Schneebedeckung glättet einen Sprung im Untergrund. Schneehöhe ca. 18 cm.	113
A.11. Schneebedeckung glättet dreieckigen und teils verdeckten Untergrund. Schneehöhe ca. 15 cm.	114
A.12. Schneebedeckung glättet einzelne Unebenheiten. Schneehöhe ca. 18 cm.	114
A.13. Schneeglättung lässt scharfe Unebenheiten unberücksichtigt. Schneehöhe ca. 3 cm.	115
A.14. Viel Schnee glättet über eine kleine Tanne hinweg. Schneehöhe ca. 40 cm.	115
A.15. Idealtypischer Innenrand der Schneebedeckung in Drauf- und Seitenansicht. Schneehöhe ca. 15 cm.	116
A.16. Leicht gealterte Schneeeinnenränder. Schneehöhe ca. 12 cm.	116
A.17. Innenrand auf natürlichem Grund. Schneehöhe ca. 10 cm.	117
A.18. Zwei Überhänge verbinden sich zu einer Schneebrücke. Schneehöhe ca. 15 cm.	118
A.19. Flache Ansicht der beginnenden Brückenbildung. Schneehöhe ca. 15 cm.	119
A.20. Ein Überhang in der beschneiten Geometrie wird überdeckt durch die Schneedecke. Schneehöhe ca. 14 cm.	119
A.21. Extremes Beispiel der Brückenbildung. Schneehöhe ca. 15 cm.	120
A.22. Beispiele für Überhänge, die sich vermutlich durch Schneealterung bilden. Schneehöhe ca. 15 cm.	120
A.23. Schneeüberhänge gebildet durch große Schneeflocken und Temperaturen nahe dem Gefrierpunkt. Schneehöhe ca. 12 cm.	121
A.24. Schneeüberhänge gebildet durch sehr große Schneeflocken. Schneehöhe 17 cm.	121
A.25. Sehr kleinräumige Schneebedeckung lässt Formen entstehen, die durch einzelne Schneeflocken geprägt sind, und nicht durch gleichmäßige Mittellung. Schneehöhe ca. 1,5 cm.	122
A.26. Gealterter Schnee kann auf dem Untergrund migrieren und irreguläre Formen bilden. Schneehöhe ca. 12 cm.	122
A.27. Bei sehr fein aufgelöstem Untergrund dominiert die Schneeflockenform über die Glättungseigenschaften der Schneedecke. Schneehöhe ca. 2 cm.	123
A.28. Partiiell getauter Schnee durch eine Glasscheibe von unten gesehen. Die Formen erscheinen irregulär. Schneehöhe ca. 5 cm.	124
A.29. Große Schneeflocken können sowohl die Oberfläche als auch Segmentbegrenzung stark verkomplizieren. Schneehöhe ca. 4 cm.	124

B.1.	Bierbank links als Foto und in der Mitte beschneit mit der Distanzfeldmethode. Auflösung 150×104 , $h_{\max} = 0.16$, Berechnungsdauer ohne Rendern 4,0s. Links die gleich Szene mit der Diffusionskernmethode beschneit und mit Randmaske gerendert. Berechnungsdauer zur Schneedeckenerzeugung 1,72 s bei $R = 3\%$	125
B.2.	Beschneite Landschaft zusammengesetzt aus mehreren separaten Schneedecken. Effektive Auflösung ca. 700×500 , $h_{\max} \approx 0.04$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 6,0s.	125
B.3.	Ein Frame aus einer Beschneiungsanimation mit der Distanzfeldmethode. Auflösung 75×75 , $h_{\max} = 0.15$, Berechnungsdauer ohne Rendern 0,4s. . .	126
B.4.	Referenzmodell der Performanceanalyse. Hier dargestellt in 83×100 Pixeln Tiefentexturauflösung, beschneit mit der Diffusionskernmethode. . .	127
B.5.	Der Goldene Reiter beschneit mit der Diffusionskernmethode. Auflösung 122×300 , $h_{\max} = 0.03$, $R = 0,05$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 29s.	128
B.6.	Ein beschneiter Hydrant (Diffusionskernmethode), dazwischen ein ungefähres Vergleichsfoto. Auflösung 108×100 , $h_{\max} = 0,05$ bzw. 0,2, $R = 0,08$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 6,5s.	129
B.7.	Variation der maximalen Brückenlänge $b_{\max} = 2.5\%$, 10% und 33% des horizontalen Szenendurchmessers. Berechnungsdauer jeweils ca. 17,6 s. . .	130
B.8.	Beispiel der Brückenbildung für die Diffusionskernmethode. Auflösung 133×200 , $h_{\max} = 0,1$ bzw. 0,2, $R = 0,05$, $b = 0,25$, Berechnungsdauer ohne Rendern ca. 10,8s.	130

Danksagung

Wir stehen auf den Schultern von Giganten. (A. de Saint-Exupéry)

Allen, die mich auf meinem Weg bis zu dieser Stelle hier
begleitet haben,

danke ich.

Die Wahrheit ist scheu, aber nicht unsichtbar.

NvF

Veröffentlichungen

- V. FESTENBERG, N. ; GUMHOLD, S.: Diffusion-Based Snow Cover generation with bridges. Eingereicht bei: *Computer Graphics Forum* (am 17. März 2010, vorbehaltlich stilistischer Überarbeitung zur Neueinreichung angenommen)
- BLENN, N. ; V. FESTENBERG, N. ; SPEHR, M.; GUMHOLD, S.: A tool for automatic preprocessing stereoscopic videos. *Proceedings of the 21st Annual Stereoscopic Displays and Applications conference* (2010)
- V. FESTENBERG, N. ; GUMHOLD, S.: A geometric algorithm for snow distribution in virtual scenes. *Proceedings of the Eurographics Workshop on Natural Phenomena* (2009)
- ROSATO, V., SIMONSEN, I., MELONI, S., ISSACHAROFF, L., PETERS, K., V. FESTENBERG, N. und HELBING, D.: A complex system's view of critical infrastructures. In: *Managing Complexity: Insights, concepts and applications*, D. Helbing (ed.), S. 241-260, ISBN 978-3-540-75260-8, Springer Verl., (2008)
- V. FESTENBERG, N. , GROSS, T. und BLASIUS, B. Seasonal forcing drives spatio-temporal pattern formation in rabies epidemics. In: *Math. Model. Nat. Phenom.* Vol. 2, No. 4, S. 63-73, DOI: 10.1051/mmnp:2008026, (2007)

Populärwissenschaftliche Artikel über diese Arbeit

- TRAUTMANN, K., Virtuelles Schneegestöber. In: *Sächsische Zeitung*, 28. Dezember 2009, Auflage ca. 150000.
- MORGENSTERN, M., Wenn der Schnee virtuell fällt. In: *Dresdner Universitätsjournal* 1/2010, 19. Januar 2010.
- SIEMON, P., Uni-Forscher Niels erfand den Computer-Schnee. In: *Dresdner Morgenpost*, 25. Januar 2010.